UN EJEMPLO DE ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA DE ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO

Tatiana Ospina[1], Tania Plazas[1] y Carmen Samper[2]
Universidad Pedagógica Nacional
tatiana.ospina.usaquen@gmail.com, tania.plazas@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

El constructo *actividad demostrativa*, desarrollado por el grupo de investigación *Æ · G* de la Universidad Pedagógica Nacional, se generó a partir de las investigaciones realizadas por ellos con estudiantes universitarios. En este artículo se presenta un ejemplo de las tareas que se propusieron a estudiantes de grado sexto con el fin de que ellos realizaran actividad demostrativa. Se analiza la tarea y se muestran evidencias de las acciones de los estudiantes que concuerdan con las incluidas en la actividad demostrativa.

A continuación se presenta un reporte parcial del trabajo de grado que estamos realizando como requisito de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). El trabajo se encuentra adscrito al grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ · G*) de dicha universidad. En particular, presentaremos una tarea que se propuso a los estudiantes de grado sexto, las acciones que realizaron y el análisis de ellas desde el constructo actividad demostrativa.

MARCO DE REFERENCIA

En el Departamento de Matemáticas de la UPN, la demostración, como objeto de estudio en la educación matemática, ha sido centro de interés del grupo *Æ · G*. Durante los últimos años dicho grupo ha adelantado un buen número de investigaciones con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.

El grupo *Æ · G* señala "la demostración como medio de descubrimiento, comunicación, explicación y sistematización" Camargo, Samper y Perry (2006), funciones estas que de Villiers (1993) asigna a la demostración. A partir de ello, proponen el constructo *actividad demostrativa* conformado por dos pro-

[1] Estudiantes de Maestría en Docencia de la Matemática.
[2] Profesora titular.

Ospina, T., Plazas, T. y Samper, C. (2011). Un ejemplo de actividad demostrativa de estudiantes de sexto grado. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 261-268). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cesos: (1) producción de conjeturas y (2) producción de justificaciones. Nos concentramos, en este momento, en el proceso de producción de conjeturas. Las acciones que realizan los estudiantes dentro de este marco deben llevar a que comprendan mejor la propiedad y el objeto matemático trabajado y que posiblemente adquieran ideas que les ayude a construir la justificación correspondiente.

Proceso de producción de conjeturas

Este proceso consta de cuatro acciones de tipo heurístico que se describen a continuación, como lo proponen Camargo, Samper y Perry (2006, pp. 373-374):

- Visualización: consiste en percibir, observar, detallar y detectar las propiedades geométricas de un objeto a partir de su representación gráfica.
- Exploración: tiene que ver con el estudio de una situación, construyendo una representación o usando materiales concretos, con el fin de descubrir propiedades o relaciones entre ellas para identificar aquellas que permanecen invariantes.
- Generalización: es la acción de establecer un enunciado, como conjetura en términos matemáticos, de lo que se descubre a partir de la exploración y la visualización.
- Verificación: el propósito es poner a prueba la conjetura formulada, realizando otras acciones de exploración.

La tarea propuesta

Como lo dicen Camargo, Samper y Perry (2006) uno de los factores que propician el desarrollo de actividad demostrativa en el aula es el tipo de tarea que se propone a los estudiantes. En particular, es necesario diseñar tareas de exploración que no tengan respuesta inmediata, con el fin de propiciar las acciones de tipo heurístico del proceso de producción de conjeturas. Ello concuerda con las tareas que da Ponte (2004) cataloga como actividades de tipo de exploración (abierto-accesible) o de investigación (abierto-difícil) en contextos matemáticos, que según el investigador son las adecuadas para generar la actividad matemática en el aula, ya que "este tipo de tareas permiten que el alumno se dé cuenta de cómo se desarrolla la actividad matemática de los matemáticos profesionales" (da Ponte, 2004, p. 33).

El tema central de la secuencia de tareas que se trabajó en esta ocasión fue el triángulo y sus propiedades. Para el diseño de las tareas se utilizó como referencia el texto *Geometría* (Samper, 2008), dirigido a estudiantes de secundaria. En particular, la tarea que presentamos es una modificación de un ejemplo encontrado en el libro; el propósito de la tarea era ilustrar la propiedad conocida como desigualdad triangular, según la cual la suma de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la medida del tercer lado del triángulo. Específicamente, se transformó para que los estudiantes llegaran a descubrir esa propiedad a través de la manipulación de materiales concretos.

La tarea propuesta fue:

- Los palitos de color amarillo, azul y rojo, tienen diferentes medidas. ¿Podemos escoger uno de cada color y unirlos para formar un triángulo? Anote en la tabla, en la columna del color correspondiente, la medida del palito y si se formó o no un triángulo. Haga diez intentos diferentes.
- Con base en la información recolectada en la tabla, describa cuándo se forma un triángulo y cuándo no se forma un triángulo. Por último, escriba una conjetura.

ANÁLISIS

Para el análisis de las acciones de los estudiantes al resolver la tarea, se observaron los videos que se realizaron cuando estaban trabajando y se tuvieron en cuenta las respuestas consignadas por los estudiantes en la hoja.

Para comenzar, se expondrá el análisis que se realizó de la tarea previamente y la razón por la cual se creía que propiciaría cada una de las acciones del proceso de conjeturación. Luego se presentará un fragmento del protocolo de clase en donde se evidencian algunas de las acciones.

Visualización

El primer punto de la tarea propicia la visualización. Los estudiantes intentarán construir una figura con forma de triángulo con los palitos. Para esto deben evocar la definición de triángulo y ver si la figura formada con los palitos satisface dicha definición.

25 Paula: Ahh si… El de 6 [toma el amarillo] el de 2 [toma el azul] y el rojo es éste. [Con los palitos escogidos pueden forman un triángulo.]

26 Profesora: A ver. Vuélvanlo a armar [colocando] puntica con puntica de cada palito.

27 Paula: ¡Ay! ¡No! [Lo trata de armar pero al palito amarillo le sobra un pedazo.]

28 Vanessa: Pero ahorita nos quedó.

29 Profesora: Vuelve a intentar. [Las niñas logran armar el triángulo.] ¿Si se puede o no se puede?

30 Vanessa: Sí, señora.

31 Profesora: Listo, ahora. ¿Cuál fue el [caso en] que no pudo?

32 Paula: El de tres [cm]…

33 Profesora: Tres amarillo.

34 Paula: Tres centímetros amarillo, cuatro centímetros azul y siete centímetros rojo.

35 Profesora: Traten de hacerlo. Muéstrenme como lo tratan de hacer.

36 Paula: Mira no se puede [muestran que, con los palitos mencionados anteriormente, no se puede formar un triángulo.]

Ejemplo visualización

Los estudiantes encuentran una combinación entre palitos que les permite formar un triángulo: el que mide seis cm (amarillo), el de dos cm (azul) y el que mide cinco cm (rojo). Los estudiantes recuerdan la forma que describe un triángulo y observan que la representación lograda con los palitos coincide con las características de un triángulo. Un segundo momento de esta acción se puede evidenciar cuando descartan la figura formada por los palitos que miden tres, cuatro y siete centímetros, puesto que la figura lograda no concuerda con la imagen que tiene de triángulo.

Exploración

Al darles varios palos de cada color y solicitar que realicen diez intentos, se favorece que el estudiante explore la situación. Dada la inexperiencia de los estudiantes con este tipo de tarea, la profesora los guía en lo que se refiere a cómo debe ser el proceso de exploración, y qué tipo de inquietudes deben guiar ese proceso.

83	Profesora:	Por ejemplo, tres [cm], uno [cm] y siete [cm]. ¿Ya están mirando? ¿Qué tienen estos numeritos para que sea o no sea triángulo? Ya tienen las medidas… ¿qué pasa con esas medidas para que dé eso? Miren qué pasa con las medidas.
84	Luisa:	No se forman porque no se pueden unir los palitos.
85	Profesora:	Pero, ¿por qué no se pueden unir? ¿Qué tienen de especial? y ¿Qué pasa con las medidas? ¿Por qué no se puede?
86	Luisa:	Es que no alcanza.
…		
90	Luisa:	Por ejemplo, acá el rojo es demasiado grande para poder unirlo… Sí. Digamos es muy grande para que se formen, porque le falta mucho.
91	Profesora:	Revisa que pasa con las medidas. A ver… Hay unos triángulos que no se pueden hacer y hay unos que sí se pueden hacer. ¿Por qué se pueden y por qué no se pueden hacer?
…		
98	Luisa:	Cuando sumamos… Se forma, cuando la suma de los más pequeños supera al más pequeño, digo al más grande.

Ejemplo de exploración

Los estudiantes han realizado diez posibilidades de combinación de palos y han determinado si se forman o no triángulos. La profesora intenta que los estudiantes centren la atención en las medidas de los palos y los múltiples ejemplos que tienen para que detecten alguna regularidad entre ellas que asegure la construcción de un triángulo.

Generalización

El segundo punto de la actividad tiene como objetivo que los estudiantes realicen una generalización de la situación. Si bien en la exploración ya detectaron la propiedad que les permite formar un triángulo con las medidas de los palitos, aún no la han formulado explícitamente como una generalización de la situación. Es importante aclarar que los estudiantes no cuentan con un lenguaje formal matemático ni una estructura lógica que les permita escribir su generalización como una proposición condicional. Sin embargo, hacen uso de algunas expresiones que la profesora ha convenido con ellos, como por ejemplo referirse a las medidas de los lados y no a los palitos o intentar expresar la condición que permite la formación de los triángulos con base en las medidas de sus lados como una situación causa-efecto.

207 Profesora: … ¿Qué dice la primera conjetura?

208 Paula: Cuando las medidas más pequeñas se suman y no alcanzan a superar el mayor número.

209 Profesora: ¿Qué pasa cuando las medidas se suman y no alcanzan el mayor número? ¿Se forma o no se forma el triángulo?

210 Paula: No se forma, porque la idea es que cuando nos dan tres medidas, entonces tú tienes que sumar las medidas más pequeñas que tiene el triángulo y si lo sumas y no supera la mayor, no supera la medida mayor, no puede hacerse el triángulo.

211 Profesora: ¿Qué decía la segunda conjetura?

212 Paula: Cuando las medidas más pequeñas se suman y si alcanza a superar el mayor número.

213 Profesora: ¿Se puede o no se puede armar un triángulo?

214 Paula: Sí… Se forma un triángulo.

Ejemplo de generalización

En la primera intervención del protocolo la profesora pregunta a los estudiantes sobre las conjeturas, es decir, les pide una generalización sobre las condiciones necesarias para que se forme un triángulo y para que no se forme. Ellos expresan una primera regularidad: si la suma de las medidas de los lados menores de un triángulo no supera la medida del lado mayor entonces no se forma un triángulo.

La segunda regularidad que mencionan es que la suma de las medidas de los lados del triángulo debe ser mayor que la medida del lado mayor para que exista un triángulo. De cierta forma, descubren el Teorema de la desigualdad triangular, y lo expresan en términos no formales usando la contrarrecíproca, en el primer caso, y el teorema mismo en el segundo caso, pero se refieren solamente a la relación entre los lados más cortos y el más largo. Es tarea de la profesora mostrar a los estudiantes que esa propiedad es válida para cualquier par de lados del triángulo con respecto al tercer lado y que ello se tiene para cualquier triángulo.

Verificación

Después de que queda establecida la conjetura en la que sólo se menciona la relación entre la suma de las medidas de los lados más cortos y la medida del lado más largo, la profesora propone algunos ejemplos para que, sin usar los palos, dejen a un lado la experiencia concreta y pasen a un plano más abstracto.

216	Laura:	Digamos, las medidas menores son dos y cuatro. Las vamos a coger y las sumo. Entonces cuando sumo dos y cuatro nos da seis y seis no alcanza a superar al número de la medida mayor que es catorce.
…		
233	Profesora:	El que tiene siete, ocho y doce ¿se forma o no se forma [triángulo]?
234	Laura:	Siii.
235	Profesora:	¿Por qué se forma?
236	Laura:	Porque siete más ocho es igual a quince y supera a…
237	Profesora:	¿Cómo?
238	Laura:	Porque siete más ocho es igual a quince y supera a doce
239	Profesora:	Entonces en general vamos a decir que Si la suma de dos de los lados es mayor que el tercer lado, no, la suma de la medida de dos lados es mayor que la medida del tercero, del tercer lado, se forma el triángulo.

Ejemplo de verificación

La exploración ya no es con el material concreto, pues los estudiantes no buscan palos con las medidas que se sugieren. El trabajo realizado les permite analizar la situación sin ello. Esto muestra que han logrado convencerse de la propiedad con los ejemplos que hicieron, tal vez porque varios estudiantes llegaron a la misma conclusión. Es decir, no hubo necesidad de verificar su conjetura. Los estudiantes ya pueden usar ese hecho para determinar, a partir de las medidas y no de la representación del triángulo, cuándo tres números corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.

CONCLUSIONES

En este análisis parcial pudimos evidenciar que las tareas propuestas permiten propiciar las acciones de tipo heurístico del constructo actividad demostrativa. Además se observa que la actividad genera una participación genuina en los estudiantes a través de la propuesta de ideas, la discusión de éstas en los grupos y la formulación de las conjeturas.

Es de aclarar que con las actividades propuestas no se pretendía que los estudiantes demostraran la propiedad descubierta, dado el nivel de escolaridad. Sin embargo se esperaba que los estudiantes usaran la propiedad para resolver otros problemas y justificaran la solución de éstos a partir de su conjetura.

El análisis de las acciones muestra que la actividad demostrativa evidenciada en el trabajo de estudiantes universitarios se puede llevar a cabo con estudiantes de básica secundaria. Sin embargo, esto depende del tipo de tareas que se propongan en el aula de clase.

Con este análisis podemos vislumbrar que las acciones de la profesora juegan un papel importante en el desarrollo de la actividad, en la gestión de la clase y participación de los estudiantes, en la construcción del conocimiento matemático, en la apropiación del lenguaje, y en el desarrollo de la cultura de argumentar con razones matemáticas fundadas, asunto central de interés en nuestro trabajo de grado.

REFERENCIAS

Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas* (volumen especial), 371-383.

da Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En L. Santos, J. Giménez, y J. da Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 25-34). Barcelona, España: Graó.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon*, 6, 15-29.

Samper, C. (2008). *Geometría*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.