FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE: UN TEMA POR EXPLORAR

Leidi Gil y Martha Orjuela
Universidad Pedagógica Nacional
leidifuentes@yahoo.es, tuchisgomez@hotmail.com

El objetivo de la ponencia es describir algunos métodos de construcción en el entorno Cabri Geometry II Plus que generan figuras de ancho constante; tales métodos son producto de un estudio sobre algunas propiedades y la historia de figuras con esta característica. Para el desarrollo de esta propuesta, presentamos específicamente un contexto que provee información sucinta de las propiedades básicas de estas figuras. Luego exponemos métodos de construcción que las generan y describimos los caminos que se utilizaron para poder deducirlos.

CONTEXTUALIZACIÓN

Las figuras geométricas de ancho constante son aquellas *que tienen el mismo ancho en cualquier dirección.* El *ancho de una figura* se refiere a la distancia entre dos rectas paralelas entre sí y perpendiculares a la dirección dada; estas rectas, conocidas como rectas soporte, intersecan a la figura en un solo punto y son perpendiculares a una cuerda de la figura que indica dicha dirección (Montejano, 1998). Si los extremos de esta cuerda están contenidos, uno en cada una de las rectas soporte, la magnitud de esta cuerda indica el ancho de la figura.

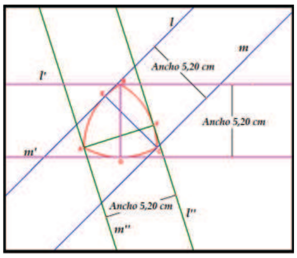


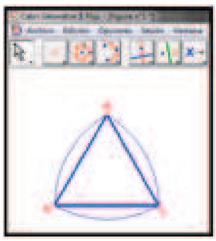
Gráfico 1. Figura de ancho constante

Las figuras de ancho constante son convexas y se pueden generar infinitas copiando métodos de construcción o simplemente modificando algunos pasos de tales métodos. Por otro lado, estas figuras han sido estudiadas desde Euler, quien las conocía como orbiformes; además se les han dado distintas aplicaciones en la ingeniería, la arquitectura y la mecánica.

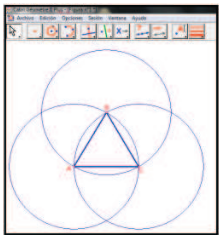
Gil, L. y Orjuela, M. (2011). Figuras de ancho constante: un tema por explorar. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 355-360). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE

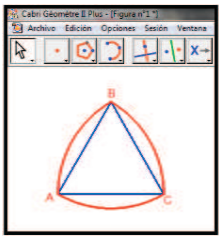
Exponemos a continuación algunos resultados de nuestro estudio exploratorio. Para iniciar este apartado mostramos el método de construcción del Triángulo de Reuleaux (figura de ancho constante presentada en 1976 por el ingeniero y matemático Franz Reuleaux), generado a partir de su definición. Específicamente, *dado un equilátero de lado L, un* ***Triángulo de Reuleaux*** *es la unión de los tres arcos de circunferencia cuyos extremos son dos vértices del triángulo, el centro de la circunferencia es el vértice restante y el radio de la misma es L”*. El procedimiento se ilustra en el Gráfico 2.



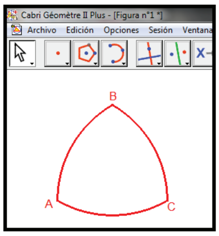
a. Construimos un triángulo equilátero *ABC*



b. Construimos $\odot A_{AB}$, $\odot B_{AB}$ y $\odot C_{CA}$



c. Construimos $\odot A_{AB}$, $\odot B_{AB}$ y $\odot C_{CA}$



d. Ocultamos las circunferencias y el triángulo.

Gráfico 2. Triángulo de Reuleaux $\hat{\Delta} ABC$

Con base en este método, nos surgieron los siguientes interrogantes: ¿Se originan figuras de ancho constante si en lugar de utilizar un triángulo equilátero, utilizamos cualquier polígono regular? Si no es así, ¿qué cambios podríamos plantear en el método para obtener figuras con esta propiedad? Gracias a la característica esencial de Cabri, su dinamismo producto de la función de arrastre, logramos dar respuesta a esos interrogantes y encontrar generalidades que nos permitieron obtener figuras de ancho constante. Por ejemplo, al partir de polígonos regulares de un número impar de lados, observamos que utilizando el mismo método de construcción para el Triángulo de Reuleaux, obtenemos figuras de ancho constante tales que su ancho es igual a la longitud del diámetro del polígono (ver Gráfico 3).

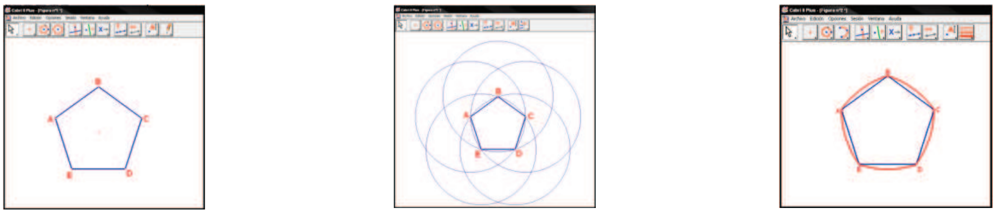


Gráfico 3. Pentágono de ancho constante

Por otro lado, con polígonos regulares de un número par de lados se mostró que el método de construcción anterior no genera figuras de ancho constante, pero que al utilizar nuevos arcos de circunferencia en el método, se obtienen figuras de ancho constante, no sólo una por polígono, sino varias dependiendo de su número de lados. Por ejemplo, si se parte del hexágono se obtienen dos figuras de ancho constante (ver Gráfico 4).

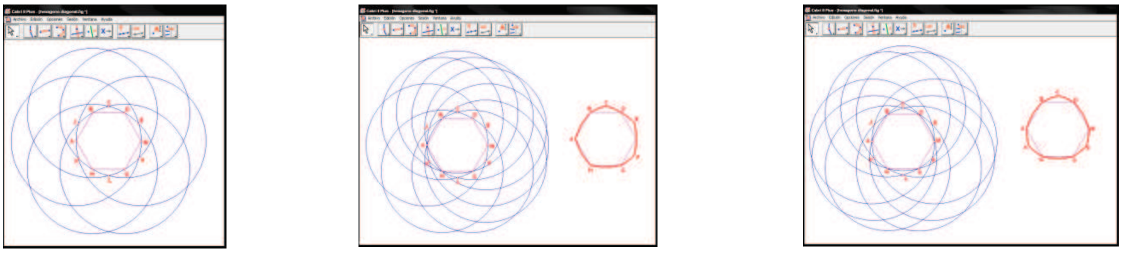
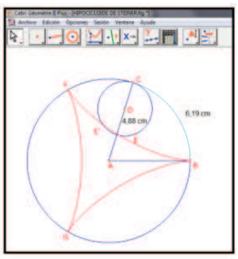
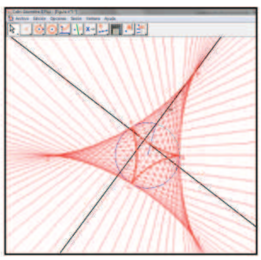


Gráfico 4. Hexágonos de ancho constante

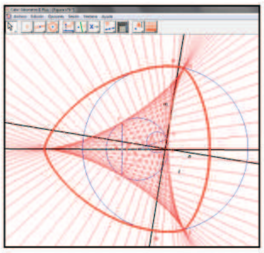
Indagando un poco más en la historia de las figuras de ancho constante, se logró establecer otra figura de ancho constante llamada Curva de ancho constante de Euler, citada por Montejano (1998) quien afirma que esta curva surge de la Hipocicloide de Steiner y su evoluta. A partir de esta idea y luego de realizar una exploración en Cabri logramos construir la figura de ancho constante construyendo inicialmente dicha hipocicloide y luego su evoluta (Gráfico 5).



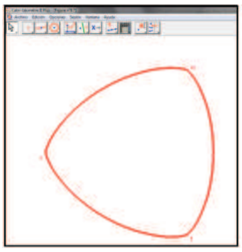
a. El lugar *BFG* es la hipocicloide de Steiner



b. El lugar *HIJ* es la evoluta de la hipocicloide de Steiner



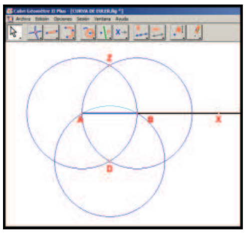
c. Construcciones auxiliares que generan la curva de Euler



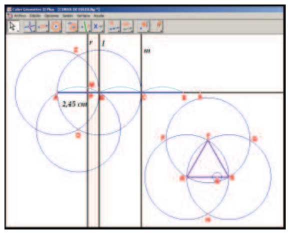
d. Curva de Euler, después de ocultar algunos objetos geométricos

Gráfico 5. Curva de ancho constante de Euler φIJH

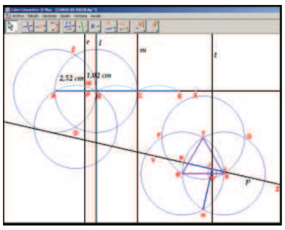
Como podemos observar la Curva de ancho constante de Euler se parece al Triángulo de Reuleaux, pero gracias a las características que tiene el software Cabri, como la visualización, la exploración y la justificación se pudo establecer que la curva de ancho constante no cumple con la definición del triángulo de Reuleaux.



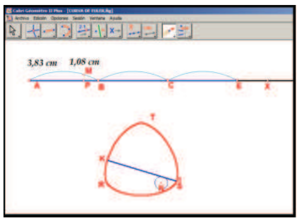
a. Construcción de un arco del Triángulo de Reuleaux



b. Construcción del punto *P*, de tal manera que al animarlo genere nuestra figura de ancho constante



c. Construcción del $\overline{KI}$ tangente a los arcos simétricos de los arcos que conforman al Triángulo de Reuleaux



d. Figura de ancho constante después de animar el punto *P* y activar la traza de los puntos *I* y *K*

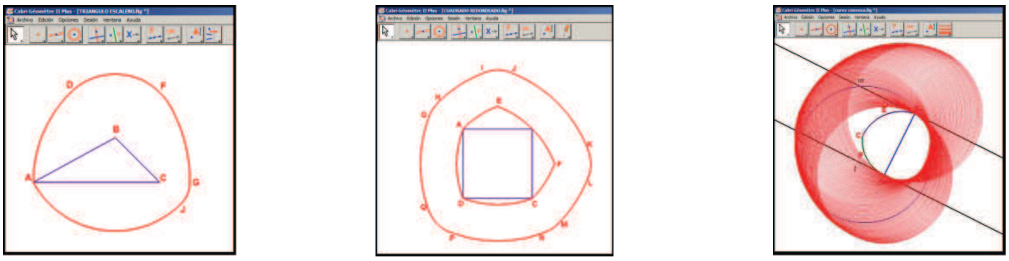
Gráfico 6. Figura de ancho constante a partir de un triángulo equilátero

A continuación mostramos una figura de ancho constante generada a partir de un triángulo equilátero y del segmento que cumple con la propiedad de ser tangente a los arcos simétricos de los arcos que conforman un Triángulo de Reuleaux con respecto a cada uno de los lados del triángulo equilátero (Gráfico 6). Es importante resaltar que la figura generada a partir de este método tiene un parecido a la Curva de ancho constante de Euler, pero no contamos con las herramientas suficientes para probarlo.

Un resultado importante que se estableció después de la exploración del método de construcción anterior, fue la relación existente entre el número de lados y la cantidad de pétalos de las flores que se originan copiando este método partiendo de cualquier polígono regular. Aunque estas flores no originan figuras de ancho constante, ya que no son cerradas y no son convexas (Gráfico 7), decidimos mostrar el resultado, primero porque poseen propiedades interesantes, y segundo porque queríamos mostrar que no siempre se pueden generar figuras de ancho constante copiando todos los métodos de construcción expuestos.

Gráfico 7. Flores de varios pétalos

Otros métodos de construcción que permiten generar figuras de ancho constante, se encontraron a partir de la exploración de figuras no regulares como el triángulo escaleno, el cuadrado, etc. (Gráfico 8). Los métodos se basaron en la construcción de arcos y en la construcción del lugar geométrico generado por puntos, segmentos o circunferencias.



a. Con base en un triángulo escaleno

b. Con base en el cuadrado

c. Con base en lugar geométrico de circunferencias

Gráfico 8

Conclusiones

Cada uno de los procedimientos que presentamos están justificados; las construcciones realizadas en Cabri nos proporcionaron ideas para justificar por qué la figura construida tienen la propiedad de ancho constante debido a la relación existente entre el software y la teoría de la geometría plana euclidiana (Marotti, 1997). Las exploraciones consistieron básicamente en la copia de algunos procedimientos de construcción que son válidos y la modificación de los mismos a través de ensayos para obtener figuras de ancho constante; estas exploraciones nos permitieron plantear conjeturas, con lo cual Cabri se convirtió en un "*motor del pensamiento deductivo, pues las propiedades explícitamente construidas se convierten en premisas, siendo las conclusiones otras propiedades verificadas en la construcción*" (Castiblanco, Camargo, Rodríguez, Acosta, Urquina, Cuéllar y Moreno (2003).

Referencias

Castiblanco, C., Camargo, L., Rodríguez, F., Acosta, E., Urquina, H., Cuéllar, H., Moreno, L. (2003). *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Memorias del Congreso Internacional* (pp. 82-90). Bogotá, Colombia: MEN.

Mariotti, M.A. (1997). Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp. 21-26). Prague: Prometheus Publishing House.

Montejano, L.P. (1998). *Cuerpos de ancho constante*. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.