Reglas y símbolos con L-sistemas

Claudia Orjuela, Clara Rojas, Jorge Páez y José Ramírez
Universidad Autónoma de Colombia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Sergio Arboleda
claudia.orjuela@fuac.edu.co, clara.rojas@uptc.edu.co, jopaez@pegagogica.edu.co, josel.ramirez@usa.edu.co

En este artículo se presenta una síntesis del trabajo abordado en el grupo de investigación Fractales DMA-UPN, sobre la incorporación de los L-sistemas como objeto de estudio en el campo de la geometría fractal, en particular en la generación de algoritmos asociados a la representación gráfica de plantas, árboles y estructuras fractales. Se adelantan reflexiones alrededor de la importancia de introducir esta temática en la enseñanza de la geometría fractal, así como del uso de software especializado (e.g., Fractal Time, L-system4, JFLAB) como herramienta didáctica para su visualización; de manera paralela se abordan reflexiones alrededor de la experiencia investigativa realizada.

Introducción

La inclusión de los fractales como objeto de estudio en el currículo de matemáticas está en desarrollo, y el grupo Fractales DMA-UPN contribuye en este sentido. Para este artículo sólo se presentará el estudio de los L-sistemas como una de las representaciones finitas del objeto fractal. Se pretende aportar en primera instancia al campo de la Didáctica de las Matemáticas. Por otro lado, se considera que con el estudio de la geometría fractal, específicamente con el estudio de los L-sistemas, se logra establecer la relación entre el componente geométrico y la mediación computacional como herramienta de apoyo a la labor docente, con el fin de incorporarla al aula de clase acorde con el nivel de formación de los estudiantes.

El equipo de trabajo ha abordado este objeto de estudio partiendo de la premisa según la cual el estudiante es el centro de la actividad académica, razón por la cual las actividades de aprendizaje deben llevar implícita una participación activa del educando, que se distancia de la realización de ejercicios rutinarios, mecánicos y repetitivos que poco aportan para la construcción de la comprensión en matemáticas. La población con la que se ha contado para la validación de la propuesta del Grupo está constituida por los estudiantes del curso electivo *Fractales*, ofrecido en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Orjuela, C., Rojas, C., Páez, J. y Ramírez, J. (2011). Reglas y símbolos con L-sistemas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 385-395). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En el curso ha tenido lugar el estudio de L-sistemas con el propósito principal de que el estudiante comprenda, por una parte, cómo las reglas de sustitución de símbolos ejercen sobre el axioma inicial el mismo efecto que tienen las reglas geométricas o algoritmos en la generación de curvas de estructura fractal, y, por otra parte, cómo el uso de la tecnología, por ser ésta un recurso mediador, simplifica procesos y permite ser la interfaz gráfica con el estudiante.

En lo que sigue, se hará una exposición de índole conceptual sobre qué es la teoría de L-sistemas, articulada con ejemplos gráficos que inducen al docente a usar una forma de representación y generación de estructuras fractales que simulan elementos de la naturaleza, para de este modo planificar actividades de exploración, innovación e investigación en el aula de matemáticas.

La fundamentación de este trabajo tiene como referentes teóricos a Peitgen, Jürgens, Saupe, Maletsky, Perciante y Yunker (1991), Mandelbrot (1982), Rubiano (2002) y Prusinkiewicz y Lindenmayer (2004/1990), entre otros.

UN NUEVO LENGUAJE

Los L-sistemas se pueden definir mediante un conjunto de símbolos que forman cadenas generadas por un conjunto de reglas de sustitución; al respecto, se puede resaltar que aunque estas cadenas no tienen un significado particular se generan figuras de gran complejidad, para la cual se hace necesaria una interpretación geométrica de los símbolos utilizados.

En consecuencia, los L-sistemas permiten abordar y profundizar en conceptos geométricos conocidos por el estudiante, e introducirlo a una nueva geometría, a un nuevo lenguaje que permite la interacción entre elementos propios del currículo de matemáticas y los ambientes computacionales, favoreciendo los procesos iterativos, la visualización de las cadenas, el proceso recursivo asociado; de esta manera, el uso de L-sistemas se convierte en una experiencia motivadora para el estudiante.

¿QUÉ SON LOS L-SISTEMAS?

Los *L-sistemas* fueron introducidos por Aristid Lindenmayer (1925-1989) en su artículo *Mathematical models for cellular interactions in development*, publicado en 1968 en el *Journal of Theoretical Biology*. En pocas palabras, el autor expuso un modelo matemático para el desarrollo y el crecimiento de las plantas. Dicho modelo se basaba en la teoría de lenguajes formales, en particular tomaba como base los estudios de Noam Chomsky sobre gramáticas. En 1984, Alvy Ray Smith adapta el lenguaje de los L-sistemas a la tecnología PC como herramienta para la simulación del desarrollo de las plantas y estudia su relación con los fractales ampliando sus posibilidades de estudio.

D0L-sistemas

El más simple de los L-sistemas se llama *D0L-sistema*, y su concepto principal es el de re-escritura. Se parte de un objeto inicial simple, una cadena o palabra definida sobre un alfabeto dado, y luego de manera determinista se van sustituyendo cada uno de los símbolos; esta sustitución se realiza en paralelo de acuerdo a un determinado conjunto de reglas de reemplazamiento. A ese *objeto inicial*, que describe el sistema antes de que comience el crecimiento se le denomina *axioma* o *semilla*. Al conjunto de reglas de reemplazamiento, que van a determinar cómo se realiza la generación o la evolución del objeto se le denomina *reglas de producción*.

De esta manera, se puede decir que un D0L-sistema está compuesto por:

Un alfabeto: es un conjunto finito Σ de símbolos. Usualmente se usan letras ordinarias del alfabeto como F, G, R, f, y algunos símbolos adicionales como + y -, que también fueron usados por Lindenmayer.

Un axioma: el axioma, también llamado iniciador o semilla, es una cadena o palabra W compuesta de símbolos de Σ. El conjunto de todas las cadenas de símbolos de Σ se denota Σ^*.

Un conjunto de reglas de producción: es un conjunto de funciones de Σ en Σ^* tal que cada función p asocia un símbolo a una cadena, es decir $p : \Sigma \to \Sigma^*$.

Si un símbolo no tiene una regla explicita de producción, se asume que éste se transforma en sí mismo. En este caso se dice que el símbolo es una constante del D0L-sistema. Por lo tanto un D0L-sistema se define como una tripleta $L = \langle \Sigma, W, p \rangle$, donde Σ es un alfabeto, W es un axioma y p es un conjunto de reglas de producción.[1]

[1] La traducción de la expresión "D0L" hace referencia a que: el sistema es determinista, es decir, cada regla de producción sustituye cada símbolo de manera única (D); la reescritura es independiente del contexto (0); el creador del L-sistema fue Lindenmayer (L).

Cada D0L-sistema define una *D0L-sucesión* y a cada uno de los términos de la sucesión se le puede asociar una representación gráfica.

D0L-sucesión: sea $L = \langle \Sigma, W, p \rangle$, un D0L-sistema. La generación de L se define como una sucesión $\{l_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ donde cada $\{l_n\}$ es una cadena sobre Σ^* tal que ésta fue generada por $\{l_{n-1}\}$ aplicando la regla de producción p a cada uno de los símbolos de $\{l_{n-1}\}$. La primera generación l_0 es el axioma W.

Otra definición importante es la *longitud de una cadena*, que corresponde al número de símbolos que conforman una cadena, y para una palabra H se denota por $|H|$.

Ejemplo 1

D0L-sistema de Fibonacci: Sea $\Sigma = \{F, G\}$ un alfabeto, $W = G$ un axioma y dos reglas de producción dadas por $p_1 : F \to FG;\ p_2 : G \to F$. La tripleta $\left\langle \Sigma, W, p_i \right\rangle$ es conocida como el *L-sistema de Fibonacci*. Los primeros cinco términos de la sucesión y las longitudes del L-sistema de Fibonacci se muestran en la siguiente tabla.

Sucesión	Generación	Longitud
l_0	G	$\|l_0\| = \|G\| = 1$
l_1	F	$\|l_1\| = \|F\| = 1$
l_2	FG	$\|l_2\| = \|FG\| = 2$
l_3	FGF	$\|l_3\| = \|FGF\| = 3$
l_4	$FGFFG$	$\|l_4\| = \|FGFFG\| = 5$
l_5	$FGFFGFGF$	$\|l_5\| = \|FGFFGFGF\| = 8$

Tabla 1. D0L-sistema de Fibonacci

Como se puede observar, las longitudes de las primeras cinco generaciones corresponden a los primeros cinco números de la sucesión de Fibonacci, de aquí que éste L-Sistema lleve dicho nombre.

Interpretación gráfica de un D0L-sistema

Existe una interpretación gráfica de los D0L-sistemas basada en lenguaje LOGO o Lenguaje de la Tortuga; fue introducida por Aono y Kunii (1984, y Smith, 1984, citados en Prusinkiewicz y Lindenmayer, 2004/1990) quienes la utilizaron para crear modelos de crecimiento de plantas y árboles. Casi al mismo tiempo Siromoney y Subramanian mostraban que los L-sistemas podían ser interpretados para la generación de algunas curvas fractales, así mismo el trabajo de Prusinkiewicz (1986) aborda la representación gráfica de los L-sistemas.

Funcionamiento de la Tortuga

Para convertir una cadena de símbolos en una imagen fractal, hay que recorrerla de una manera particular. Para ello, a cada uno de los símbolos de la cadena se le asigna un orden que será interpretado por una "tortuga" hipotética que irá recorriendo el plano de un lado a otro, realizando una determinada acción, la cual dependerá del símbolo que lea. Algunas de estas órdenes únicamente alterarán el estado interno de la tortuga, por ejemplo, la dirección le indicará a la tortuga que se mueva por el plano dibujando una línea o que se mueva en línea recta pero sin dejar rastro. Una vez que la tortuga ha recorrido toda la cadena, la imagen fractal quedará definida; vale la pena mencionar y aclarar que el resultado es una aproximación de la imagen fractal, ya que es un proceso finito de su construcción.

Como se ha comentado anteriormente, la tortuga posee un estado interno y una posición en el plano; estos dos elementos, junto con la cadena de salida, serán los únicos elementos necesarios para generar la imagen fractal.

Estado de la Tortuga: es una tripleta (x, y, θ), donde la coordenada cartesiana (x, y) representa la posición de la tortuga y θ, el ángulo de dibujo, es la dirección en que está mirando la tortuga, es decir, la dirección en la que dibujará la siguiente línea.

Además, se definen una longitud, notada como d, que es la mínima distancia que la tortuga puede recorrer, y un ángulo δ de incremento, que es el ángulo mínimo que será capaz de girar la tortuga.

La tortuga responde a los comandos representados por los siguientes símbolos, que son los más frecuentes para generar L-sistemas a partir de un software.

Símbolo	Función
F	Da un paso hacia adelante dibujando una línea de longitud d. Es decir el estado de la tortuga cambia a (x, y, θ), donde $x' = x + d\ \cos\theta$ y $x' = x + d\ \cos\theta$. Por lo tanto, la tortuga dibuja un segmento entre los puntos (x, y) y (x', y').
f	Da un paso hacia adelante a una distancia d pero sin dibujar línea.
$+$	Gira en sentido anti-horario un ángulo δ, por lo tanto el siguiente estado de la tortuga es $(x, y, \theta + \delta)$.
$-$	Gira en sentido horario un ángulo δ, por lo tanto el siguiente estado de la tortuga es $(x, y, \theta - \delta)$.

Tabla 2. Comandos asociados con la Tortuga

Ejemplo 2

D0L-sistemas de cuadrados: Sea (2,5, 45º) el estado inicial, $d = 1.0$ la distancia y $\delta = 90^{\circ}$ o $\delta = 4$; y $F - F - FF + F + F + FF + f$ una palabra, entonces la interpretación de la tortuga se muestra en la Figura 1, donde las flechas punteadas indican la dirección y la longitud.

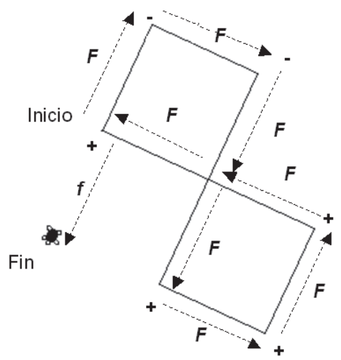


Figura 1. Visualización del Ejemplo 2

Ejemplo 3

D0L-Triángulo de Sierpinki: Sea el D0L-sistema $H = \langle \Sigma, W, p \rangle$, tal que: $\Sigma = \{F, X, Y, +, -\}, W = YF\ p = \{p_1 : X \rightarrow YF + XF + Y,\ p_2 : Y \rightarrow XF - YF - X\}$. La tortuga no realiza acción cuando encuentra el símbolo Y o X. El Estado de la Tortuga es:

Parámetro	Valor
D	1.0
Δ	$60º/6$
Coordenada x	0
Coordenada y	0
Ángulo θ	0º

Tabla 3. Estado de la Tortuga, Triángulo de Sierpinski

La gráfica de la primera generación es: $XF - YF - XF$

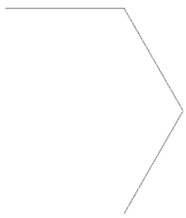
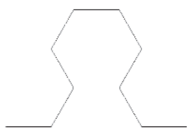


Figura 2. Generación 1, Triángulo de Sierpinski

A continuación se muestran algunas generaciones:

Paso	Representación gráfica	Generación
h_2		$YF + XF + YF - XF - YF - XF - YF + XF + YF$
h_3		$XF - YF - XF + YF + XF + YF + XF - YF - XF - YF + XF + YF - XF - XF - YF + XF + YF - XF - YF - XF + YF + XF + YF + XF - YF - XF$

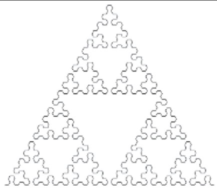
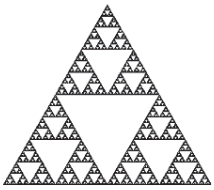
h_6		No se escriben los símbolos por su cantidad
h_{10}		No se escriben los símbolos por su cantidad

Tabla 4. Generaciones D0l-Sistema del Triángulo de Sierpinski

Como se puede observar se vuelve dispendioso el manejo de las cadenas de símbolos en la escritura del L-sistema.

Ramificaciones generadas a partir de L-sistemas

Para generar imágenes fractales provistas de ramificaciones como por ejemplo un arbusto, se necesita introducir dos nuevos símbolos, los cuales indican el inicio y el fin de una ramificación. En ese momento, la tortuga volvería a la posición donde comenzó la rama, logrando así seguir su recorrido por otras ramas.

Ejemplo 4

Arbusto: Sea el *D0L-Sistema* $H = \langle \Sigma, W, p \rangle$, tal que: $\Sigma = \{F, +, -, [,]\}$ $W = F,\ p: F \to F[-F]F\,[+F][F]$, además, el Estado de la Tortuga es:

Parámetro	Valor
D	1.0
Δ	36º/10
Coordenada x	0
Coordenada y	0
Ángulo θ	90º

Tabla 5. Estado de la Tortuga, Arbusto

Así las primeras generaciones son:

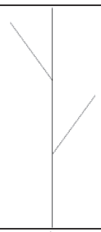
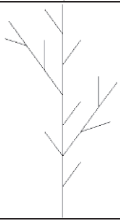
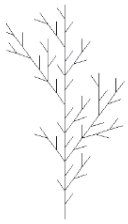
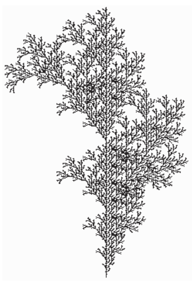
Paso	Representación gráfica	Generación
h_1		$F[-F]F[+F][F]$
h_2		$F[-F]F[+F][F][-F[-F]F[+F][F]]F[-F]F[+F][F]$ $[+F[-F]F[+F][F]][F[-F]F[+F][F]]$
h_3		Tiene alrededor de 472 símbolos
h_6		Tiene alrededor de 54.372 símbolos

Tabla 6. Generaciones D0L-sistema Arbusto

EL SOFTWARE COMO RECURSO DIDÁCTICO

Se observa que en cada generación el número de símbolos aumenta de forma exponencial, dificultando la interpretación gráfica de estos, sin embargo, existen programas que interpretan estos símbolos, entre ellos L-System 4, Fractal Time (Derlinchán, 2004), y JFLAB.

La introducción de ambientes computacionales ha favorecido el trabajo con este objeto de estudio. Por su capacidad de iteración rápida e interactiva, con la ayuda de algoritmos y procedimientos relativamente sencillos, es el instrumento ideal para el trabajo con los fractales, en particular los L-sistemas. Con su capacidad de interacción con el usuario, el software permite un ajuste rápido entre las intuiciones establecidas en términos de procedimientos espaciales y la formulación definitiva de estos procedimientos como algoritmos, mediante contrastes sucesivos con variaciones en los parámetros y en las reglas de producción. Hasta ahora la variación de las condiciones en los modelos sólo se podían seguir mediante procesos realizados con lápiz y papel, que eran tediosos dada la complejidad en la generación de la cadena.

Conclusiones

El estudio de los L-sistemas ha venido consolidándose como una línea de investigación, enmarcada en el estudio de los fractales y su incorporación en el currículo de matemáticas. No se puede dejar de lado, la importancia de las tecnologías en el desarrollo de los L-sistemas. Como se indicó, existe una variedad de softwares que permiten ser la interfaz entre la representación visual y la teoría de L-sistemas, posibilitando al estudiante reflexionar, visualizar, relacionar y comprobar algunas propiedades de los objetos geométricos en juego. Además, propicia condiciones para que el profesor pueda reforzar los conceptos abordados en sus clases y establecer sus relaciones con otros conceptos matemáticos como lo son los fractales.

Para terminar, se invita a los docentes a discutir e indagar sobre qué tipo de actividades se pueden proponer a los estudiantes y hasta dónde se puede aprovechar la teoría de los L-sistemas para favorecer el aprendizaje o la construcción de nuevos conceptos; también, a determinar el potencial y la dificultad que implica el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas. Para apoyarlos se sugiere consultar trabajos que son producto de las reflexiones del grupo de investigación en torno a este objeto de estudio (ver, e.g., Orjuela, Páez y Ramírez, 2010).

Referencias

Derlinchán, D. (2004). *Generación gráfica de fractales*. Proyecto de fin de carrera no publicado, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, Sevilla, España.

Mandelbrot, B. (1982). *The fractal geometry of nature*. (Primera edición.) San Francisco, USA: W. H. Freeman.

Orjuela, C., Páez, J. y Ramírez, J. (2010). *Generación de plantas, árboles y estructuras fractales a partir de L-sistemas*. Ponencia presentada en Primer Congreso Internacional y Tercero Nacional de Matemáticas Asistidas por Computador, 28 de septiembre al 1 de octubre de 2010, Universidad de Caldas, Manizales, Colombia. Disponible en: http://es.scribd.com/doc/45294881/15.

Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T. y Yunker, L. (1991). *Fractals for the classroom: Strategic activities*. (Volumen 1). Nueva York: Springer-Verlag & NCTM.

Prusinkiewicz, P. (1986). Graphical applications of L-systems. En M. Wein y E.M. Kidd (Eds.), *Proceedings of graphics interface '86/Vision interface '86* (pp. 247-253). Toronto, Canadá: Canadian Information Processing Society.

Prusinkiewicz, P. y Lindenmayer, A. (2004/1990). *The algorithmic beauty of plants*. Nueva York: Springer-Verlag. Versión electronica disponible en: http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.lowquality.pdf

Rubiano, G. (2002). *Fractales para profanos*. Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Nacional de Colombia.