REVISTA EMA
2005, VOL. 10, Nº 2, - VOL. 10, Nº 3, 353-373

COMPLEJIDAD DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES Y DISEÑO DE ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE CON TECNOLOGÍA[1]

"Technology without curriculum is only worth the silicon it is written on."

Jim Kaput[2]

PEDRO GÓMEZ

La tecnología electrónica puede llegar a ser un catalizador de los procesos de cambio en el aula de matemáticas. Sin embargo, los efectos de la utilización de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dependen de cómo el profesor diseñe y desarrolle el currículo, de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares vivan experiencias matemáticas que sean relevantes para su aprendizaje. El diseño y puesta en práctica de actividades que utilicen la tecnología debe ser un procedimiento sistemático que tenga en cuenta la diversidad de significados de los conceptos matemáticos y la complejidad de los aspectos cognitivos y de instrucción del tema que se pretenda tratar; que se base en las potencialidades de la tecnología dentro del contexto de los problemas que se quieran abordar y de los conceptos que estos problemas involucran; y que utilice coherentemente esta información.

Technology can promote change processes in the mathematics classroom. However, the impact of technology on the teaching and learning of mathematics depends on how the teacher designs and develops the curriculum, so that students can live mathematical experiences that are relevant to their learning. Designing and implementing learning activities involving technology should be a systematic procedure. It should take into account the multiple meanings of mathematical concepts, the complexity of the cognitive and teaching aspects of the mathematical topic at hand, and the possibilities offered by technology in the context of the instructional problems to be faced and of the concepts involved in them.

1. Esta es una versión revisada y extendida de Gómez (2004).
2. Este artículo es un homenaje a Jim Kaput, quien murió trágicamente en 2005 y a quien le escuché esta frase en una de sus charlas en la reunión anual de la NCTM en 1994.

palabras claves:

TECNOLOGÍA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Existe la creencia de que las nuevas tecnologías electrónicas pueden llegar a ser *la solución* a muchos de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje en la escuela. En el caso de las matemáticas, este mito parece estar aún más difundido en los medios, entre algunos padres de familia y algunas otras instituciones (ver, por ejemplo, Penglase y Arnold, 1996). El deseo de abordar estos problemas y la creencia en este mito ha llevado a algunas instituciones y gobiernos a invertir ciegamente en tecnología. Todos hemos oído hablar de al menos una institución en la que los computadores se cuidan con recelo en una sala a la que cada escolar asiste una o dos veces por semana. Muchos profesores de matemáticas se han encontrado con la obligación de utilizar la tecnología en sus clases de matemáticas, sin saber qué hacer con ella[3]. Aunque la tecnología no puede ser, por sí sola, la solución a ninguno de los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no es posible ignorar sus potencialidades en el aula. Esta importancia se expresa en el principio de tecnología de los estándares de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000, pp. 24-25):

> Las tecnologías electrónicas, tales como calculadoras y computadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y "hacer" matemáticas… Los escolares pueden aprender más matemáticas y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología… En los programas de enseñanza de las matemáticas, la tecnología se debe utilizar frecuente y responsablemente, con el objeto de enriquecer el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos. La existencia, versatilidad y poder de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los escolares, así como también la mejor forma de aprenderlas. En las aulas de matemáticas contempladas en los Principios y Estándares, cada estudiante tiene acceso a la tecnología con el fin de facilitar su aprendizaje matemático, guiado por un docente experimentado.

3. Mientras que durante muchos años el acceso de los escolares a la tecnología en la escuela fue limitado (por ejemplo, muchas instituciones tenían una única sala de informática), esta situación está cambiando rápidamente (Figueras, 2005, p. 10). En los planes educativos de la Junta de Andalucía, en España, se propone que haya un computador por cada dos estudiantes. Por su parte, países como Inglaterra y México están instalando pizarrones electrónicos en gran cantidad de aulas.

El principio de tecnología enfatiza dos cuestiones: “qué matemáticas deben aprender los escolares” y “la mejor forma de aprenderlas”. En otras palabras, la pregunta central de este principio se refiere al papel que la tecnología puede jugar en el diseño y el desarrollo de actividades con las que los escolares puedan vivir experiencias matemáticas significativas para su aprendizaje (Gómez, 1997).

La tecnología no es más que un recurso en el aula de matemáticas. Sus efectos en el aprendizaje de los escolares depende de muchos factores. Al final de la cita anterior, se mencionan dos de ellos: el acceso a la tecnología y el conocimiento y experiencia del profesor. Es por esta razón que los estudios sobre el impacto del uso de la tecnología en el aula de matemáticas no pueden ser conclusivos (ver, por ejemplo, Kissane, 2002; Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche, 2001; Penglase, 1996; Ruthven, 1995). Qué matemáticas aprenden los escolares y cómo las aprenden depende de muchas variables que no son posibles controlar por fuera de los entornos de investigación de los estudios específicos. No obstante, el aprendizaje de los escolares sí depende directamente del tipo de experiencias matemáticas que ellos puedan vivir dentro y fuera del aula. Éste es un factor general que incluye a las demás variables. Dentro de todas las experiencias matemáticas que los escolares pueden vivir, nos interesan específicamente aquellas en las que, como profesores, podemos influir. Es decir, aquellas que surgen de las actividades que nosotros les proponemos, como producto del diseño y el desarrollo curricular.

Las reflexiones anteriores pretenden centrar la problemática del uso de la tecnología electrónica en el aula en los procesos de diseño y desarrollo curricular. Aunque hay muchos aspectos de la relación entre tecnología y enseñanza de matemáticas, mi interés en este artículo se focaliza en la relación entre el diseño y desarrollo curricular y el papel que la tecnología puede jugar en esos procesos. Pretendo abordar una pregunta que supongo que muchos profesores se hacen cuando se enfrentan al uso de la tecnología: “Si ahora tengo este recurso disponible en clase, ¿qué actividades les propongo a mis alumnos para hacer el uso más eficaz y eficiente posible del mismo?”

CURRÍCULO Y TECNOLOGÍA

Supongamos que estamos trabajando la función cuadrática con nuestros alumnos de bachillerato. De las clases anteriores, sabemos que la mayoría de ellos son capaces de resolver algunas tareas relacionadas con el reconocimiento y la caracterización de esta función. Por ejemplo, pueden identificar los diferentes elementos de las representaciones simbólicas y gráficas, evaluar una función, producir representaciones gráficas de funciones cuadráticas específicas y dar ejemplos de funciones cuadráticas con diferentes tipos de raíces, entre otras cosas (Lupiánez, Rico, Gómez y Marín, 2005). Sin embargo, nuestra experiencia de cursos anteriores (que podría ser corroborada en la literatura) nos ha mostrado que los escolares tienen dificultades para establecer la relación entre las diferentes representaciones simbólicas y la representación gráfica de la función. Esto quiere decir, por ejemplo, ser capaz de reconocer y de utilizar hechos como que el parámetro a representa la dilatación de la gráfica, que los parámetros *h* y *k* en la expresión $f(x) = (x-h)^2 + k$ identifican las coordenadas del vértice, o que los parámetros r_1 y r_2 en la expresión $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$ identifican los cortes de la gráfica con el eje x (ver Figura Nº 1). En otras palabras, nuestro interés se centra en lograr que nuestros alumnos sean capaces de resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros.

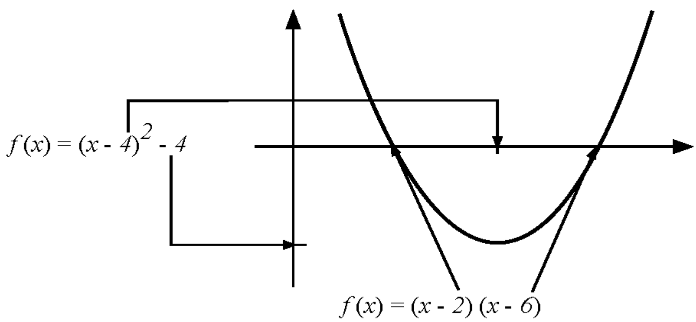


Figura Nº 1. Relación entre elementos simbólicos y gráficos

Nuestro problema consiste entonces en encontrar formas de contribuir a que nuestros alumnos puedan superar estas dificultades y quisiéramos utilizar la tecnología como un recurso para abordarlo y solucionarlo. ¿Qué podemos hacer? No basta con decir que vamos a utilizar calculadoras gráficas o computadores en clase. Cuando estemos en el aula, tendremos que proponer algún tipo de actividad[4]. Es en estas circunstancias en las que la frase "voy a utilizar las calculadoras gráficas para trabajar en el significado gráfico de los parámetros de las representaciones simbólicas de la función cuadrática" es una frase general que adquiere sentido únicamente cuando propongamos un diseño curricular que podamos desarrollar en el aula. ¿Qué tipos de actividades podemos proponer?

4. Utilizo el término "actividad" en un sentido amplio, que puede incluir la explicación magistral del profesor. La "actividad" de los escolares en este caso consiste en escuchar y, si es el caso, tomar apuntes.

Una primera aproximación podría ser *mostrar* esas relaciones. Podríamos llevar un computador o una calculadora gráfica al aula y mostrar que cambios en el parámetro a de la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ implican cambios en la dilatación de la gráfica resultante. Inclusive podríamos utilizar las potencialidades de la calculadora para realizar una simulación en la que se produzca la familia de funciones que resulta de variar los valores del parámetro b en $f(x) = 2x^2 + bx - 2$ y podríamos sacar conclusiones sobre el significado gráfico de este parámetro.

Otra posibilidad sería que diseñáramos unas actividades en las que nuestros alumnos pudieran *ver* en sus calculadoras los efectos gráficos de cambiar los parámetros. O podríamos proponerles una actividad con dos listas de objetos: una lista de representaciones simbólicas y una lista de representaciones gráficas. Les podríamos pedir que, *sin ayuda de la calculadora*, establecieran los emparejamientos correspondientes. Una vez hechos los emparejamientos, les podríamos sugerir que utilizaran la calculadora para verificar sus respuestas. También podríamos hacer una búsqueda en la red y escoger alguna de las actividades que allí se encuentran y que puedan tener alguna relación con el tema del significado gráfico de los parámetros. Las anteriores serían algunas estrategias posibles para utilizar la tecnología en nuestra clase. Pero, ¿es ésta una aproximación *eficaz* y *eficiente* al problema? En otras palabras,

1) ¿estamos abordando el problema que nos interesa?,
2) ¿tenemos algún grado de certidumbre de que nuestra aproximación va a resolver el problema? y
3) ¿estamos logrando los mejores resultados posibles con los recursos que tenemos disponibles (i.e., las calculadoras gráficas)?

EL PROBLEMA Y LA COMPLEJIDAD DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Las tres preguntas son importantes. Y aunque *intuitivamente* tendemos a pensar que las respondemos afirmativamente cada vez que proponemos actividades a nuestros alumnos, un análisis más detallado de cada una de ellas puede develar la gran complejidad que existe en los procesos de diseño y desarrollo curricular, cuando estos procesos se refieren a un concepto matemático concreto. Exploremos cada una de las preguntas por separado. ¿Cuál es el problema? Todas las actividades que he mencionado tienen que ver con la problemática del significado gráfico de los parámetros de las representaciones simbólicas de la función cuadrática. Pero esto no quiere decir que estemos necesariamente abordando el problema que nos propusimos al comienzo. Que nuestras actividades tengan como *contenido* el significado gráfico de los parámetros no implica necesariamente que, al realizar esas actividades, nuestros alumnos desarrollen las capacidades necesarias para resolver problemas que involucren esas características de la función cuadrática y puedan superar las dificultades que tienen al respecto. La función cuadrática es una estructura matemática compleja y el tema que nos interesa es tan sólo una faceta de esa complejidad. Aunque nuestro problema es *cognitivo* (queremos que nuestros alumnos desarrollen unas ciertas capacidades y superen unas ciertas dificultades), comprender y abordar ese problema cognitivo requiere que nosotros, como profesores, conozcamos con suficiente detalle la complejidad y multiplicidad de los significados del concepto función cuadrática. El problema cognitivo que nos interesa tendrá significado, desde la perspectiva del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje, cuando tengamos una descripción suficientemente detallada del concepto al que se refiere. Para ello, es necesario realizar un *análisis de contenido* de dicho concepto[5].

No pretendo en este documento presentar un análisis de contenido detallado de la función cuadrática. En la Figura Nº 2 presento un mapa conceptual en el que se identifican y relacionan las principales categorías en las que se puede organizar la multiplicidad de significados de este concepto. En ella se aprecia la identificación de cuatro sistemas de representación y del aspecto fenomenológico. Es posible desarrollar en detalle cada una de las representaciones, estableciendo sus elementos (conceptos) y las relaciones entre ellos (procedimientos). Por ejemplo, se podrían desarrollar en detalle cada una de las formas simbólicas y establecer los procedimientos que las relacionan (i.e., completación de cuadrados para pasar de la forma simbólica estándar $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, ver Figura Nº 4.

5. El análisis de contenido es uno de los cuatro análisis del *análisis didáctico*. El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002). Está compuesto por el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un concepto matemático que considera relevantes para efectos de la planificación de la instrucción.

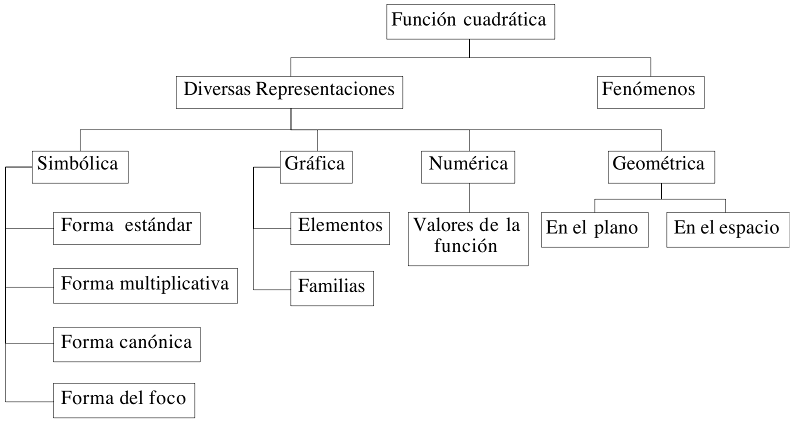


Figura Nº 2. Mapa conceptual general de la función cuadrática

En la Figura Nº 3 se aprecian algunas de estas relaciones. Observamos algunos de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra y algunas de las posibles relaciones entre fenómenos y subestructuras de la función cuadrática que les pueden servir de modelo. Y también observamos una primera aproximación a la relación entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico (que se llama, en la Figura Nº 3, *traducción entre sistemas de representación*). Esta relación se establece entre elementos de las diferentes formas simbólicas (los parámetros) y *elementos* de la representación gráfica (i.e., vértice, cortes con los ejes, foco, directriz). Aunque no se representa en la figura, hay una gran variedad de conexiones (relaciones) entre estos elementos. Por lo tanto, desde el punto de vista del *análisis de contenido*, estos ejemplos dan muestra de la complejidad del problema que queremos abordar en clase.

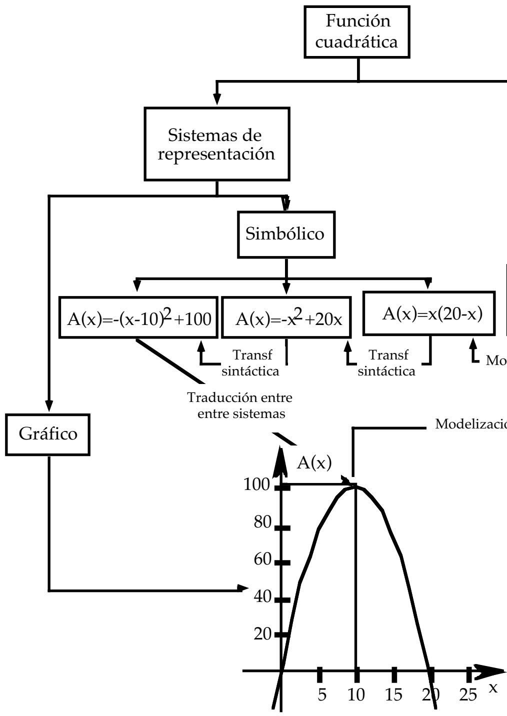


Figura Nº 3. Conexiones entre elementos de un mapa conceptual parcial de la función cuadrática

De hecho, podemos abordar con claridad la definición de los aspectos cognitivos gracias a la descripción que surge del análisis de contenido del concepto matemático. En otras palabras, *podemos concretar las capacidades que deseamos que los escolares desarrollen y las dificultades que ellos pueden tener al abordar tareas, solamente cuando, con motivo de haber realizado el análisis de contenido, hemos identificado, organizado y seleccionado los significados relevantes del concepto matemático en cuestión.* En la Figura Nº 4, he retomado la función $f(x) = (x-4)^2 - 4$ de la Figura Nº 1 y he incluido algunos de los procedimientos simbólicos y gráficos que pueden estar involucrados en su análisis. Es decir, he identificado y seleccionado algunos de los significados del concepto relacionados con su estructura conceptual (conceptos y procedimientos) y con algunas de sus representaciones. Estos son los significados que considero relevantes dentro del contexto del problema propuesto. He omitido el análisis del foco y la directriz y su correspondiente forma simbólica para evitar una mayor complejidad en el esquema. Este análisis más detallado muestra que, desde una perspectiva cognitiva, el manejo del significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática debe involucrar, al menos, el manejo de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra, los procedimientos simbólicos y gráficos que establecen la relación entre los parámetros de la forma canónica y las transformaciones gráficas a partir de la forma simbólica estándar $h(x) = x^2$.

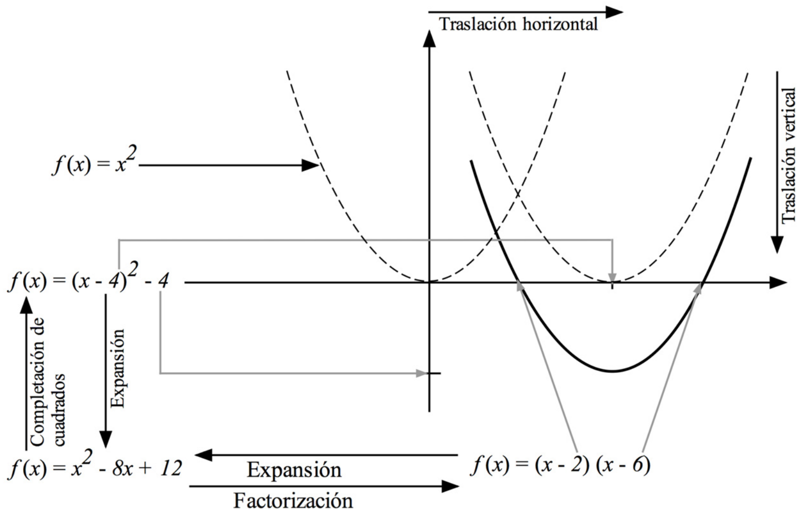


Figura Nº 4. Conexiones y procedimientos

En la Figuraa Nº 4 podemos observar la conexión entre la complejidad del análisis de contenido y la complejidad del análisis cognitivo. La capacidad "manejo del significado gráfico de los parámetros" implica otras capacidades y tiene su propia estructura y complejidad. Esto significa que no podemos considerarla de manera aislada. La capacidad en la que nos hemos interesado forma parte de un grupo de capacidades que tiene que ver con el manejo de conceptos, procedimientos y representaciones relacionados con la función cuadrática. Otras capacidades de este tipo pueden ser, por ejemplo, el identificar características comunes de familias de parábolas o relacionar diferentes parábolas con la parábola estándar $y = x^2$ (Lupiánez et al., 2005).

La noción de *capacidad* es central en el análisis cognitivo. En el contexto de las matemáticas escolares, utilizo este término para referirme a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo tarea (por ejemplo, los problemas de transformar una forma simbólica de la función cuadrática —la estándar— en otra —la canónica—). Afirmo que un individuo ha desarrollado, en alguna medida, una capacidad dada cuando él puede resolver tareas que la requieren. En la Tabla Nº 1 he seleccionado y organizado aquellas capacidades que considero más relevantes para el problema propuesto[6].

Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones simbólicas			
C1	Completación de cuadrados	C3	Factorización
C2	Expansión		
Identificar, mostrar y justificar los parámetros			
C4	Forma canónica (a, h, k)	C6	Forma estándar (a, b, c)
C5	Forma foco (p, h, k)	C7	Forma multiplicativa (a, r_1, r_2)
Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos			
C8	Coordenadas del vértice	C11	Coordenadas del foco
C9	Puntos de corte con el eje Y	C12	Ubicación de la directriz
C10	Puntos de corte con el eje X	C13	Ubicación del eje de simetría
Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones gráficas			
C14	Translación horizontal	C16	Dilatación
C15	Translación vertical		

Tabla Nº 1. Capacidades relacionadas con el significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática

Abordar el problema que hemos propuesto implica recorrer el camino que lleve a los escolares de una situación en que han desarrollado unas capacidades básicas con respecto a la función cuadrática[7], a otra situación en la que los escolares son capaces de resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática. Sin embargo, la información que surge del análisis de contenido y que da lugar a la Tabla Nº 1 muestra que no hay un único camino por el

6. Lupiáñez et al. (2005) han desarrollado un instrumento para, dado un listado de competencias, establecer en qué medida un grupo de capacidades contribuyen al desarrollo de dichas competencias. De esta manera, es posible establecer un vínculo entre la planificación local para un concepto matemático concreto (como es el caso que discuto aquí) y la planificación global de una asignatura o un plan de estudios.
7. Por ejemplo, proporcionar argumentos para justificar porqué una función es cuadrática o no, o identificar elementos en la expresión simbólica de una función cuadrática: variable, exponente, coeficientes principal, lineal e independiente, etc.

que el aprendizaje se puede desarrollar si se quiere transformar la situación inicial en la situación final. Para pasar de una situación a la otra, es necesario que los escolares desarrollen o ya hayan desarrollado una colección de capacidades intermedias[8]. Pueden haber diferentes caminos que involucran diferentes capacidades y diferentes tareas pueden poner en juego diferentes capacidades de los escolares (ver la Figura Nº 5)[9].

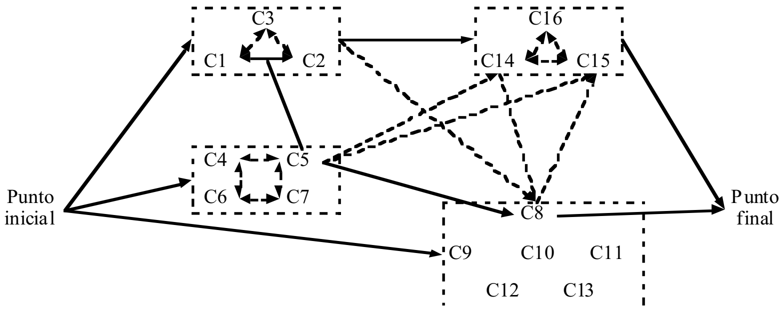


Figura Nº 5. Posibles caminos de aprendizaje

En la Figura Nº 5 he identificado algunas capacidades (Ci) y algunos caminos y he diferenciado algunos vínculos con una línea continua para indicar una selección de caminos. Por ejemplo, una tarea puede requerir la determinación de las coordenadas del foco de la función $f(x) = x^2 - (8x + 12)$, y, en consecuencia, puede involucrar la completación de cuadrados (C1), la identificación de los parámetros de la forma del foco (C5) y la identificación de las coordenadas del vértice (C7). Por lo tanto, debemos determinar qué capacidades pueden llegar a ponerse en juego con motivo de la tarea que propongamos. El análisis de los posibles caminos de aprendizaje puede inducirnos a cambiar la tarea, dependiendo de los recursos que tenemos disponibles (e.g., la calculadora gráfica) y de nuestra percepción de cuáles son las capacidades relevantes en ese momento.

En resumen, el *análisis cognitivo* de nuestro problema es una cuestión compleja. Esta complejidad está vinculada con la diversidad de significados de la función cuadrática como concepto matemático dentro de las matemá-

8. Por otro lado, a partir de nuestra experiencia podemos identificar que, para algunas de estas capacidades, nuestros alumnos manifiestan *dificultades*. Un alumno manifiesta una dificultad en relación con una capacidad dada, cuando incurre en errores al abordar tareas que ponen en juego dicha capacidad.
9. La idea de "posibles caminos de aprendizaje" es una adaptación (para la planificación local realizada por el profesor) de la noción de "trayectoria hipotética de aprendizaje" propuesta por Simon (1995; Simon y Tzur, 2004). La identificación de posibles caminos de aprendizaje no incluye el análisis de tareas (Gómez y Lupiáñez, 2005).

ticas escolares. Por lo tanto, el problema que identificamos al comienzo, relacionado con el significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática, que parecía, "relativamente" sencillo, adquiere otra dimensión. Esta dimensión expresa la complejidad de los temas de las matemáticas escolares cuando los analizamos desde la perspectiva del *análisis didáctico*. Tenemos, ahora sí, bases para responder a la primera pregunta. La información que surge de los análisis de contenido y cognitivo nos permite dar sentido a la frase "significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática" y, de esta manera, reconocer la complejidad y la estructura de los aspectos semánticos (diversidad de significados), cognitivos y de instrucción involucrados.

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN Y TECNOLOGÍA

La complejidad de las matemáticas escolares que he puesto en evidencia en el apartado anterior implica que hay también una cierta complejidad en los procesos de diseño y selección de actividades para la enseñanza (el *análisis de instrucción*). No podemos suponer que *cualquier actividad* que tenga que ver con el problema que queremos abordar y que ponga en juego la tecnología de alguna manera vaya a tener éxito desde el punto de vista de los objetivos de aprendizaje que nos hemos impuesto. ¿Cómo diseñar o seleccionar actividades? ¿Qué actividades podemos llevar al aula que aborden el problema y utilicen eficaz y eficientemente la tecnología disponible? Para responder esta pregunta tenemos que analizar las potencialidades que nos ofrece la tecnología, *dentro del contexto del problema que queremos abordar*.

Podríamos llevar algunas transparencias con gráficas parecidas a las del apartado anterior y *mostrárselas* a nuestros alumnos. Podríamos también explicarles esas relaciones. Inclusive, podríamos hacer este tipo de demostración con la ayuda de una calculadora gráfica y el retro proyector. Pero, ¿tendremos alguna certidumbre de que este tipo de actividad, en la que los escolares son *espectadores* en una demostración, les ayudará a desarrollar las capacidades que identificamos arriba? Es muy posible que no. Para desarrollar esas capacidades y superar las dificultades se requiere que nuestros alumnos puedan vivir experiencias matemáticas en las que ellos *pongan en juego* su conocimiento (capacidades) y puedan *reconocer* que los errores en los que incurren son producto de un conocimiento parcial (dificultades) que deben reelaborar. Por lo tanto, al menos para el tipo de problema que queremos abordar, las actividades que propongamos deben inducir a nuestros alumnos a *actuar*. No pueden ser actividades en las que ellos jueguen el papel de espectadores. ¿Cómo nos puede ayudar la tecnología para lograr estos propósitos?

Ya hemos visto que tecnologías como la pizarra y la tiza, el retro proyector de transparencias o la calculadora gráfica manejada exclusivamente por el profesor no son necesariamente muy eficaces para nuestro problema. Debemos utilizar tecnologías con las que nuestros alumnos pongan en juego su conocimiento matemático. El lápiz y el papel son esenciales. Para el tema que estamos tratando, la calculadora gráfica puede llegar a ser una tecnología eficaz[10]. Recordemos que la calculadora gráfica permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación. Esta es la característica de esta tecnología que corresponde directamente con el problema que queremos abordar. Observemos que, para este problema, no necesitamos utilizar otras potencialidades de la calculadora gráfica (como la posibilidad de realizar cómputos complejos, o la de explorar la relación entre la estructura matemática y los fenómenos de los que puede ser un modelo matemático). En este caso, nos interesa la capacidad de la calculadora gráfica para producir y relacionar rápida y dinámicamente las representaciones simbólica, gráfica y numérica de la función cuadrática. Esto implica que, dependiendo de las actividades que propongamos, nuestros alumnos podrán, entre otras cosas:

- producir la gráfica de cualquier expresión simbólica de una función cuadrática,
- observar valores específicos de una función cuadrática y relacionarlos con las representaciones simbólica y gráfica,
- manipular y observar los efectos gráficos de cambios en los valores de los parámetros de una forma simbólica y
- producir conjeturas al respecto y verificarlas.

Aunque, como se aprecia en la lista anterior, la calculadora gráfica puede facilitar la realización de algunas tareas que requieren capacidades concretas, esto no significa que *cualquier* actividad en la que nuestros alumnos deban "hacer algo" con la calculadora gráfica sea eficaz desde el punto de vista del problema que nos interesa. Por ejemplo, darles una lista de expresiones simbólicas de funciones cuadráticas y pedirles que produzcan sus gráficas contribuiría muy poco a superar sus dificultades y a desarrollar buena parte de las capacidades de la Tabla Nº 1. En este tipo de actividad, ellos no ponen en juego el conocimiento del que surgen esas dificultades. Algo similar puede suceder si les pedimos que observen simulaciones en las que se representan gráficamente cambios en los parámetros de la expresión simbólica. Enton-

10. Veremos más adelante que, en términos de la reflexión del apartado anterior, una de las potencialidades de la tecnología es la multiplicidad de posibles caminos de aprendizaje que pueden generarse con tareas que la utilicen apropiadamente.

ces, ¿qué tipos de actividades podemos proponer? No hay un procedimiento sistemático para ello, más allá de establecer la relación entre la descripción detallada de nuestro problema[11] y las potencialidades de los recursos que tenemos disponibles. En lo que sigue, analizo una de estas actividades.

EJEMPLO DE UNA ACTIVIDAD

La actividad que presento a continuación forma parte de una serie de actividades desarrolladas en "una empresa docente" (Gómez, Mesa, Carulla, Gómez y Valero, 1996). En esta actividad presentamos algunas características de un objeto matemático (funciones cuadráticas concretas) y le pedimos a los escolares que identifiquen el objeto en cuestión y describan otras de sus características. La actividad requiere que se rellenen los espacios en blanco de la Tabla Nº 2 (en las gráficas, cada marca representa una unidad). En clase, se espera que el profesor organice a los escolares en grupos de tres o cuatro alumnos, cada uno con una calculadora gráfica. Los grupos trabajan en la actividad y el profesor guía y promueve la discusión interna en los grupos. Cuando los escolares han trabajado en la actividad, el profesor genera una discusión en clase a partir de la presentación de las propuestas de los diferentes grupos.

¿Qué implica esta actividad? ¿Es relevante para nuestro problema? ¿Utiliza eficaz y eficientemente la tecnología? Observemos que, en esta actividad,

1) no hay un algoritmo preestablecido para resolverla y el camino para la acción no se encuentra completamente especificado con anterioridad;

2) hay soluciones múltiples (por ejemplo en la forma simbólica utilizada) y hay diversos caminos posibles para la solución;

3) hay múltiples criterios que se pueden utilizar para tomar decisiones;

4) hay cierto grado de incertidumbre;

5) requiere asignar significado a cada uno de los elementos de la estructura matemática en su relación con los demás elementos y estableciendo la estructura subyacente;

6) requiere la formulación de conjeturas y su verificación; y

7) no se puede resolver por prueba y error[12].

11. En términos de los significados del concepto matemático, de las capacidades que consideramos relevantes y de las dificultades que pueden presentar los escolares.

12. La formulación de las características de esta actividad se basan en las propiedades del pensamiento de alto nivel (Resnick, 1987).

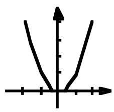
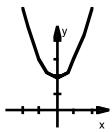
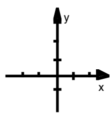
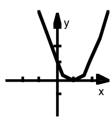
	Expresión simbólica	Vértice	Eje de simetría	Foco	*Directriz*	Acción con relación a $y = x^2$	Raíces	Corte con el eje y
	$y = x^2$	$(0, 0)$	$x = 0$	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$y = -\frac{1}{4}$	Ninguna	*0*, doble	$y = 0$
		$(0, 2)$		$\left(0, \frac{9}{4}\right)$	$y = \frac{7}{4}$	Traslación en y de dos unidades hacia arriba	$\varnothing$	
	$y = (x-2)^2$							
						Traslación en x de una unidad hacia la derecha		

Tabla Nº 2. Actividad tipo "tabla" para la función cuadrática

La actividad es relevante para nuestro problema porque *implica la posibilidad de una gran variedad de posibles caminos de aprendizaje* e induce a los escolares a proponer conjeturas de solución y verificarlas. Al hacerlo, ellos deben poner en juego su conocimiento sobre el significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática y relacionar los diversos elementos de las representaciones simbólica, gráfica y geométrica (multiplicidad de capacidades). Los escolares deben al menos:

1) utilizar la información de que disponen para encontrar *una* expresión simbólica de la función;

2) verificar que esa expresión simbólica es coherente con la información; y
3) producir otras formas simbólicas de la función para determinar los otros datos que se requieren.

Por ejemplo, en el caso de la segunda fila, los escolares pueden basarse en la información sobre el vértice para producir una conjetura sobre la expresión simbólica en forma canónica $y = a(x-h)^2 + k$ (capacidades C4 y C8) y producir la gráfica en la calculadora y verificarla con la gráfica propuesta (capacidades C8, C9 y C10). O pueden utilizar la información sobre el foco y la directriz (capacidades C11 y C12) para producir una conjetura sobre la expresión simbólica en la forma $y = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2 + y_0$ (capacidad C5) y verificar esta hipótesis con la calculadora (capacidades C8, C9, C10, C11 y C12). Una vez hecho esto, pueden observar la gráfica para obtener una conjetura sobre las raíces (capacidad C9), conjetura que pueden verificar con la calculadora o simbólicamente produciendo la expresión en forma multiplicativa $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ de la función (capacidad C7).

¿Qué papel juega la calculadora gráfica en estos procesos? En las situaciones hipotéticas que he descrito en el párrafo anterior se aprecia el papel de esta tecnología. La calculadora gráfica le permite a los escolares verificar sus conjeturas. Los escolares pueden explorar las representaciones gráficas de diferentes propuestas de formas simbólicas y, de esta manera, poner en juego una variedad de capacidades. El uso de la calculadora gráfica libera a los escolares del proceso tedioso de producción de gráficas a partir de tablas. Además, si observamos la séptima columna de la tabla, vemos que, gracias al uso de la calculadora gráfica, los escolares pueden desarrollar capacidades para producir la gráfica de una función cuadrática sin necesidad de pasar por la representación numérica (tablas) o de utilizar la tecnología. Los escolares pueden utilizar la calculadora de muchas maneras imprevistas y esto es inevitable dentro del proceso de exploración de la herramienta. Sin embargo, si ellos buscan resolver los problemas planteados en la actividad tendrán que usarla *eficaz* y *eficientemente*.

El diseño y desarrollo de una actividad no se restringe a la producción de una tarea, (tal y como la he presentado) y a su puesta en juego dentro del aula. Al pensar en una actividad, debemos también pensar en nuestra propia actuación en clase como profesores. Cuando proponemos la actividad a nuestros alumnos y ellos la abordan, nosotros debemos saber qué hacer cuando, dentro del trabajo de los grupos, surgen dudas, identificamos dificultades, se incurre en errores, o se proponen caminos innovadores. También debemos tener criterios para tomar decisiones a la hora de invitar a los grupos a presentar su trabajo, de inducir una discusión entre ellos, o de resumir y sacar conclusiones sobre la discusión. ¿Qué criterios utilizar para tomar estas decisiones? Estos criterios deben surgir de la información que hemos producido al realizar los análisis de contenido y cognitivo, al analizar las potencialidades de las tecnologías disponibles y al establecer las relaciones entre ellos.

ANÁLISIS DIDÁCTICO Y USO DE TECNOLOGÍA

En la Figua Nº 6 se representan las cuatro cuestiones que he considerado en los apartados anteriores. A través de un ejemplo, he descrito estas cuatro cuestiones y las relaciones entre ellas. He sugerido que el uso apropiado de la tecnología (o cualquier otro material o recurso) es un problema de diseño y desarrollo curricular. Esto significa que la tecnología se debe usar con un propósito específico relacionado con las capacidades y competencias cuyo desarrollo esperamos promover en nuestros alumnos. Por lo tanto, el uso de la tecnología requiere del análisis cognitivo del tema que se piense tratar en clase. He mostrado, que, para realizar el análisis cognitivo, es necesario realizar un análisis de contenido de la estructura matemática en cuestión. La información que surge de estos dos análisis nos debe servir de base para, por un lado, identificar y caracterizar el problema que queremos abordar en el aula y, por el otro, para decidir cómo utilizar la tecnología. Para ello, es necesario que conozcamos sus características y potencialidades. El diseño (o selección) de las actividades deberá surgir de relacionar la información que emerge de los análisis de contenido y cognitivo con nuestro conocimiento de la tecnología dentro del contexto del problema que queremos abordar. Cuando establezcamos esa relación, podremos proponer y gestionar actividades que, además de ser relevantes desde el punto de vista del aprendizaje de nuestros alumnos, utilicen eficaz y eficientemente la tecnología disponible.

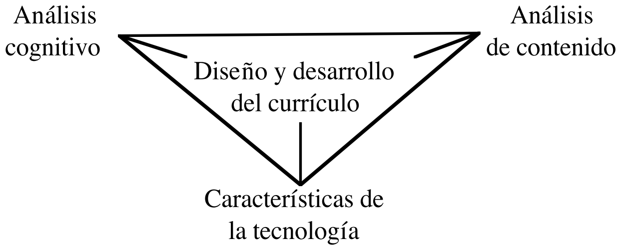


Figura Nº 6. Los cuatro elementos del análisis

Se podría afirmar que esta propuesta tiene sentido solamente cuando todos los escolares tienen disponible en todo momento la tecnología más avanzada. Pero el tipo de tecnología y el acceso a ella son dos de las características que hay que tener en cuenta en el análisis. De la misma forma, el análisis de contenido y el análisis cognitivo pueden sugerir que una *demostración* por parte del profesor sea la manera más eficaz y eficiente de usar la tecnología. Lo que sugiero en la Figura Nº 6 es que el uso que se haga de la tecnología depende del problema concreto que se quiera abordar y de la tecnología que se tenga disponible. En algunos casos, decidiremos que no tiene sentido utilizar la tecnología. Pero lo haremos, con argumentos (basados en el análisis didáctico y el análisis de tecnología) que nos permiten justificar nuestras decisiones. También se puede argumentar que el procedimiento que he propuesto requiere de mucho tiempo y esfuerzo y que, por consiguiente, no es posible llevarlo a cabo dentro de las presiones de la rutina diaria del profesor. Este argumento es parcialmente válido. El análisis didáctico de una estructura matemática es un procedimiento complejo y dispendioso. Por lo tanto, no podemos realizarlo en detalle cada vez que abordamos una nueva estructura matemática. En el transcurso de un curso académico podremos trabajar en dos o tres estructuras matemáticas. No obstante, mientras que trabajamos en esos temas, cuando nos enfrentamos a uno diferente, podemos siempre formularnos una serie de preguntas que es posible responder con el conocimiento y la experiencia que ya tenemos. Estas preguntas abordan cada uno de los elementos de la Figura Nº 6.

Análisis de contenido

1) ¿Cuáles son los conceptos y procedimientos que conforman la estructura matemática?

2) ¿De qué maneras se puede representar el tema?

3) ¿Cuáles son las relaciones entre los diferentes elementos de la estructura conceptual y sus representaciones?

4) ¿Cómo se pueden organizar los fenómenos para los que la estructura matemática puede servir de modelo?

Análisis cognitivo

1) ¿Qué capacidades han desarrollado ya nuestros alumnos?

2) ¿Qué capacidades esperamos que desarrollen con motivo de las actividades que van a realizar?

3) ¿Qué dificultades hemos percibido que los escolares muestran cuando abordan el tema?
4) ¿Cuáles son los posibles caminos de aprendizaje para el tema?

Tecnología

1) ¿Qué significados (conceptuales, procedimentales, representacionales y fenomenológicos) se favorecen al utilizar la tecnología?
2) ¿Qué capacidades se facilitan o se ponen en juego cuando se usa la tecnología?
3) ¿Qué posibles caminos de aprendizaje se favorecen?

Diseño y desarrollo del currículo

1) ¿Qué actividades son relevantes para las capacidades que queremos desarrollar en nuestros alumnos y para las dificultades que esperamos que superen?
2) ¿Qué tareas pueden aprovechar las potencialidades de la tecnología para poner en juego dichas capacidades?

TECNOLOGÍA Y DESARROLLO PROFESIONAL

La tecnología es un catalizador de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero el éxito de su utilización depende de cómo el profesor diseñe y desarrolle el currículo de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares vivan experiencias matemáticas que sean relevantes para su aprendizaje. Es en este sentido que no se puede mirar a la tecnología como la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Muchos de los argumentos a favor (o en contra) del uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se hacen al nivel de la planificación global del currículo (ver, por ejemplo, la cita del NCTM al comienzo de este artículo y Lagrange et al., 2001). Éste es el nivel que Rico (1997, p. 409) denomina "planificación para los profesores". En este artículo he resaltado la importancia y relevancia de considerar el uso de la tecnología al nivel de la planificación local del currículo (Gómez, 2002, p. 256). El primer argumento es general: resalta las potencialidades de la tecnología y las relaciona con el currículo de las matemáticas escolares. El segundo argumento es particular: tiene en cuenta la especificidad de cada concepto matemático en sus diversas dimensiones (de contenido, cognitivo y de instrucción) y promueve la necesidad de analizar la relevancia, la eficacia y la eficiencia con la que un recurso concreto (e.g., la calculadora gráfica) puede ser puesta en juego en la planificación y desarrollo de una unidad didáctica.

El comportamiento del profesor en el salón de clase (en su interacción con los escolares para la construcción del conocimiento matemático) depende de su conocimiento y de sus visiones acerca de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza (Dossey, 1992). Este comportamiento puede cambiar en la medida en que estos conocimientos y estas visiones cambien. Para ello se requiere que el profesor pueda vivir experiencias didácticas que pongan en juego y lo induzcan a cuestionar sus conocimientos y sus visiones. La necesidad de utilizar la tecnología como nuevo agente didáctico y la necesidad de diseñar actividades que aprovechen las potencialidades de la tecnología pueden convertirse en la oportunidad para que el profesor viva el tipo de experiencias que se requieren dentro del proceso de cambio. El profesor, al enfrentarse a estas nuevas situaciones, puede construir una nueva visión del contenido matemático, del proceso de enseñanza y aprendizaje y del papel que cada uno de ellos puede jugar en la construcción del conocimiento.

REFERENCIAS

Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: its Role and its Influence. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 39-48). New York: Macmillan.

Figueras, O. (2005). Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 5-16). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa, 10* (1), 93-111.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293.

Gómez, P. (2004). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas*. Trabajo presentado en X Jornadas de investigación en el aula de matemáticas, Granada.

Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2005). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congresso Ibero-americano de educaçao matemática, Oporto, Portugal.

Gómez, P., Mesa, V. M., Carulla, C., Gómez, C., y Valero, P. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la* *exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Kissane, B. (2002). Technology and the curriculum: The case of the graphics calculator. *The New Zealand Mathematics Magazine, 39* (1), 64-84.

Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C., y Trouche, L. (2001). *A meta study on IC Technology in education. Towards a muldimensional framework to tackle their integration*. Trabajo presentado en 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht.

Lupiánez, J. L., Rico, L., Gómez, P., y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congresso Ibero-americano de educaçao matemática, Oporto, Portugal.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Penglase, M., y Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematics Education: A Critical Review of Recent Research. *Mathematics Education Research Journal, 8* (1), 58-90.

Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think*. Washington: National Academy.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

Ruthven, K. (1995). Pressing on. Towards considered calculator use. En L. Burton & B. Jaworski (Eds.), *Technology in mathematics teaching - a bridge between teaching and learning* (pp. 231-256). Bromley: Chartwell-Bratt.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Simon, M. A., y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 91-104.

Pedro Gómez
Universidad de Granada
Granada, España
E-mail: pgomez@valnet.es