ANÁLISIS HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE SEMEJANZA

Hermes Nolasco Hesiquio, Santiago R. Velázquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero México
nolascohh@hotmail.com, sramiro@prodigy.net.mx

Resumen. En este trabajo realizamos un análisis histórico epistemológico del concepto de semejanza, tratando de identificar rupturas y filiaciones que hayan sido históricamente resistentes a la evolución, a la generalización y que, por tanto, puedan describirse como obstáculos epistemológicos. La distinción de los tres momentos en la evolución histórica de la semejanza ha permitido identificar tres aproximaciones al concepto cuando se considera como objeto de enseñanza.

Palabras clave: obstáculo epistemológico, análisis histórico, semejanza, media superior

Abstract. In this paper, we carry out an historical, epistemological analysis of the concept of similarity, trying to identify divisions and affiliations that have been historically resistant to evolution and generalization and which, as a result, can be described as epistemological obstacles. The differentiation of the three moments in the historic development of similarity allows to identify three approaches to the concept when it is considered as a teaching objet.

Key words: epistemological obstacles, historical analysis, similarity, high school

Introducción

En la actualidad, los textos escolares definen la «semejanza» como un objeto muy elaborado; visión que es consecuencia de las numerosas generalizaciones que se han hecho sobre el concepto a lo largo de los siglos. Lo anterior, conlleva la necesidad de revisar la evolución histórica-epistemológica del término, así como de las transformaciones geométricas vinculadas por él.

Estudiaremos, en una primera parte, el desarrollo histórico del concepto de «semejanza», deteniéndonos en los problemas más significativos a los que ha estado ligado el curso de su evolución, y evidenciaremos su potencialidad como articulador del conocimiento matemático a través de su contextualización en la didáctica actual (Rondero, 2006).

En una segunda parte, hemos realizado un análisis epistemológico en el que presentamos una descripción de los obstáculos más representativos que han estado asociado a su evolución histórica.

Marco teórico-metodológico

La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard, 1938), fue retomado e introducido por Brousseau (1976) al campo de la didáctica de la matemática, acercándose a las causas que conducen a errores: “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado" (p. 104). De este modo, al hacer mención a los obstáculos epistemológicos, no se refiere necesariamente a los conocimientos erróneos; sino al tipo de conocimiento que están obstaculizando la adquisición (construcción) de uno nuevo.

Dentro de esta perspectiva, nos permitirá identificar rupturas y filiaciones que hayan sido históricamente resistentes a la evolución, a la generalización y que, por tanto, puedan describirse como obstáculos epistemológicos:

> El mecanismo de la adquisición de conocimientos, puede aplicarse tanto a la epistemología o historia de la ciencia, como al aprendizaje o la enseñanza. Tanto en un caso como en el otro, la noción de obstáculo es fundamental para plantear el problema del conocimiento científico (Brousseau, 1983, p. 38).

La noción de obstáculo epistemológico es de suma importancia en nuestra investigación, ya que aportará un conocimiento imprescindible para la comprensión de los factores determinantes de procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de «semejanza» en las matemáticas que se ofrecen en la Educación Media Superior del Sistema Educativo Mexicano. Un primer punto de interés es la identificación de los principales momentos en que la semejanza tuvo una fuerte presencia, aquéllos en que convivió con otras nociones matemáticas, como la proporcionalidad y el teorema de Thales; conceptos que incidieron en su transformación y en la emergencia del concepto, así como en sus representaciones simbólicas asociadas.

La metodología empleada en este estudio permite analizar una noción matemática en los que la identificación de los obstáculos epistemológicos se hace a partir de las ideas de Bachelard (1938), quien establece que un obstáculo epistemológico es un conocimiento previo que se identifica como causa que provoca estancamientos, regresiones o inercias en el desarrollo del conocimiento matemático.

Respecto al estudio de la evolución histórica del concepto de semejanza, coincidimos con los trabajos realizados por Lemonidis (1991), quien ha realizado revisiones históricas del concepto, el cual relaciona con la situación correspondiente en la enseñanza, identificando tres grandes periodos:

Aportaciones de la antigua Grecia

La primera demostración del teorema de Thales y de algunos otros relativos a figuras semejantes se encuentra en *Los Elementos* de Euclides (s. IV a. C.). Es menester destacar en este período la influencia de la geometría euclidiana respecto a la idea de que las transformaciones no existen como tales.

La noción de semejanza ha estado estrechamente vinculada con la geometría desde los orígenes de ésta. Thales de Mileto, reconocido pensador griego, es considerado el primer geómetra y uno de los siete de sabios de la Grecia antigua. Si esta interpretación es justa, tenemos que considerar a Thales como el iniciador del método deductivo que hace de la Geometría una ciencia racional, independiente del empirismo, pero que se adapta a la realidad física de una manera perfecta, estableciendo el inicio para el razonamiento geométrico que habría de culminar con Euclides. Además, al involucrar el concepto semejanza en el razonamiento proporcional, se precisan los conceptos de razón y proporción.

Los historiadores atribuyen a los griegos, y en particular a los Pitagóricos, el desarrollo de la teoría de las proporciones, aunque reconocen que sus orígenes pueden rastrearse en los babilonios. Esta evidencia la proporciona una tabla que se encuentra en el Museo Británico y que remite a varios problemas relacionados con la proporcionalidad (Comin, 2000).

La concepción de la escuela Pitagórica, en sintonía con el pensamiento babilónico, se basaba en la idea de que «todo es número». Así, para los Pitagóricos un número podía relacionarse con cualquier magnitud. "Aunque estos dos conceptos eran bien distintos, el número correspondía a la aritmética y teoría de números, y a la magnitud a la geometría, sin embargo, reinaba una voluntad de unificar el número y la magnitud en la escuela pitagórica" (René de Cotret, 1985, p. 34). Intentaron relacionar los números y las magnitudes por medio de proporciones, lo que les permitía resolver algebraicamente los problemas geométricos.

Para resolver ciertas ecuaciones de segundo grado, los pitagóricos utilizaban principalmente el método de las proporciones. Ahora sabemos que con dicha teoría podemos encontrar segmentos lineales que cumplen proporciones como:

A) $a:b=c:x$

B) $a:x=x:b$

Donde *a, b* y *c* son segmentos lineales dados. Mediante el teorema de la proporcionalidad es posible encontrar el valor de *x,* además de saber la solución de A).

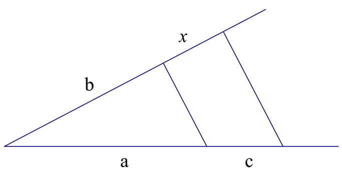

Figura 1

Si atendemos al dibujo de la figura 2, nos daremos cuenta de que *x* es la solución de B).

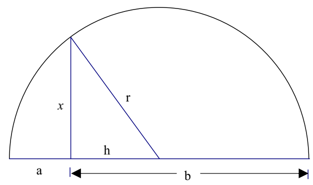

Figura 2

Nótese que para éste último, lo que tenemos que hacer ver es que $x^2 = ab$. Pero, a través de la aplicación del teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$x^2 = r^2 - h^2$$

Esto, por última observación de la sección anterior, es igual a

$$x^2 = (r+h)(r-h) = b \cdot \mathrm{a}$$

Teóricamente, en un principio, el razonamiento anterior era aplicable a magnitudes conmensurables. El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados, hecha por los mismos Pitagóricos, puso fin a la adecuación del mundo de los números enteros, lo que contribuyó a separar el estudio de los números y el de las magnitudes, puesto que los números son discretos y las magnitudes continuas. Esta separación del estudio del número del de las magnitudes, pudo ser un obstáculo de la noción de semejanza. Lo anterior se hace patente en los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), pues la aritmética y las magnitudes se trabajan de manera independiente: el libro VII se refiere a los números proporcionales, y el libro V a las magnitudes proporcionales.

Del período que va desde el siglo XVI hasta el XVIII. Los problemas de representación del espacio

Después de la desaparición de la sociedad antigua, específicamente con la destrucción del Museo de Alejandría, la matemática en general cayó en un gran abismo, cuya producción fue escasa y pobre aproximadamente durante un milenio.

Las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes –sólo conocidas a través de traducciones– pudieron ser leídas en fuentes directas, y se despertó una nueva curiosidad por la Geometría, cuyos progresos fueron lentos al principio; pero, transcurrida la etapa de asimilación, las ideas geométricas adquirieron el carácter abstracto y general.

A lo largo del siglo XVI y una buena parte del siglo XVIII la atención de los matemáticos se dirigió especialmente al álgebra y el cálculo descubierto por Newton y Leibniz. También lo es para los geómetras renacentistas que se preocuparon de dar a la ciencia que cultivaban la generalidad de que carecía, centrándose en los problemas de la representación del espacio.

Los problemas de representación que surgieron en el Renacimiento se convertirían en un importante punto de apertura para el estudio de las transformaciones. Durante tal momento histórico se resaltó la función de la transformación como herramienta útil en la resolución de problemas prácticos, sobre todo en pintura y arquitectura.

Girard Desargues (1591-1662) fue uno de los primeros que intentó la tarea de proporcionar una base sólida a las reglas utilizadas por los pintores renacentistas. De esta manera, abrió una vía completamente nueva al tratar los problemas del diseño arquitectónico a partir de procedimientos puramente geométricos. A pesar de utilizar los recursos de la geometría descriptiva, su nomenclatura era con frecuencia complicada, y no encontró la oportunidad ni el apoyo necesario para que sus luminosas ideas se propagaran adecuadamente.

Uno de los primeros descubrimientos en la geometría proyectiva fue el famoso Teorema de los triángulos de Desargues: *si dos triángulos ABC y A´B´C´ están en perspectiva desde un punto O (es decir, si AA´, BB´ y CC´ concurren en O), entonces las intersecciones de los lados correspondientes pertenecen a la misma recta (es decir,* $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ *y* $R = CA \cap C'A'$ *son colineales).*

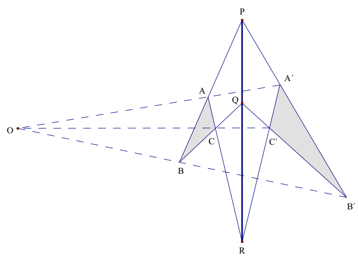

Figura 3

La importancia del Teorema de Desargues en el presente análisis radica en las propiedades de las figuras que pueden ser clasificadas como *métricas* y *proyectivas*, estableciendo aquellas propiedades necesariamente relacionadas, ya sea directa o implícitamente. Un ejemplo de las primeras son: la igualdad de segmentos de línea, la semejanza de triángulos; de las segundas, la concurrencia de líneas y la colinealidad de puntos.

Podemos considerar a Desargues como el iniciador de la geometría proyectiva, su teorema, junto con otros resultados, fue escrito por él en una obra que tuvo la mala fortuna de no encontrar las circunstancias ni el momento oportuno para su difusión y desarrollo. A esto se le aúna el creciente interés hacia otras ramas de las matemáticas recién creadas, tales como el cálculo diferencial e integral, que derivó en que las ideas aportadas por Desargues cayeran en el olvido.

Siglos XIX y XX. Dicho periodo destacó debido a la estructuración y algebrización de la geometría

En el siglo XIX se consideraron la homotecia y la semejanza como objetos matemáticos, debido, en gran parte, al desarrollo que experimentó la geometría a partir de la fecha de publicación de la geometría descriptiva de Monge (1820) y del Programa Erlangen de Felix Klein (1872).

Primeramente, en la Escuela Normal de París y luego en la Politécnica Garpard Monge (1746-1818) tomó parte activa. En su *Tratado de Geometría Proyectiva*, Monge sustentó los primeros ejemplos de la fecundidad de la transformación de las figuras espaciales en planos, que permite demostrar muchas proposiciones de la geometría plana a través de la consideración de figuras que resultan de ambas proyecciones, así como de la mayor parte de los teoremas de transversales y de casi todas las propiedades de las cónicas. En este sentido, la semejanza jugó un papel importante en este periodo, en tanto herramienta útil para la solución de problemas, aunque no se le dio el reconocimiento como objeto matemático, preservando el sentido estático. Este sentido de la semejanza como objeto matemático fue un obstáculo que la mantuvo por varios siglos en estado de hibernación. Tal proceso culminó en el siglo XIX con Hilbert, con la formulación de los axiomas euclidianos y valorización del sistema deductivo.

Los acontecimientos matemáticos ocurridos en la primera mitad del siglo XIX ejercieron su influencia hasta los comienzos del XX. Ellos dominaron el campo de la geometría hasta el momento en que surgieron las ideas de Sophus Lie y de F. Klein.

Klein (en su Programa Erlangen en 1872) logró la síntesis de las geometrías, basándose en la noción de grupo de transformaciones, que le permite introducir distinciones precisas entre tipos diferentes de geometrías. El grupo principal de transformaciones del espacio está constituido por el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariantes las propiedades geométricas de las figuras. Diversos grupos de transformaciones caracterizan a las distintas geometrías, permitiendo estudiar los entes que las integran desde el punto de vista de las propiedades invariantes en las transformaciones de cada grupo. El mismo Klein explica:

> Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por el contrario, estas propiedades son, efectivamente, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su tamaño o magnitud absoluta, y finalmente también el sentido en el cual estas partes están dispuestas. Los desplazamientos del espacio, sus

> transformaciones con similitud, así como aquellas con simetría, no alteran pues las propiedades de las figuras más que las transformaciones compuestas con las precedentes *[…]* (Klein, 1872, citado en Piaget y García, 1982, p.102).

Bajo esta óptica, se concibe el concepto semejanza como objeto matemático de una transformación caracterizada porque existe un tratamiento en que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Identificación de obstáculos epistemológicos

El estudio de las situaciones problemáticas tratadas en los distintos períodos históricos, las invariantes de los que se han tomado conciencia colectiva y las diferentes representaciones simbólicas usadas nos han permitido identificar los siguientes obstáculos epistemológicos que describimos a continuación:

a) Obstáculo separación del estudio del número del de las magnitudes

Esta separación del estudio del número del de las magnitudes, pudo ser un obstáculo de la noción de semejanza. Lo anterior se hace patente en los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), pues la aritmética y las magnitudes se trabajan de manera independiente: el libro VII se refiere a los números proporcionales, y el libro V a las magnitudes proporcionales.

Actualmente asociamos de forma natural a cualquier cantidad de una magnitud una cierta medida numérica, pero en el pensamiento griego magnitudes y números eran objetos bien distintos. Los números eran discretos, mientras que las magnitudes continúas.

b) Obstáculo de la concepción estática

La idea primitiva de la semejanza estaba contenida entre las relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas, esta concepción estática de la geometría, originó una visión intrafigural de la geometría, pues la idea de transformar una figura en otra estuvo ausente, como se puede observar en el libro VI de *Los Elementos* de Euclides.

c) El reconocimiento tardío como objeto matemático

Utilización de la semejanza como una herramienta útil para la resolución de problemas gráficos, preservando el sentido estático. Este sentido de la semejanza como objeto matemático fue un obstáculo que la mantuvo por varios siglos en estado de hibernación. Tal proceso culminó en la época actual con Hilbert, quien ha reformulado los axiomas euclidianos y valorizado el sistema deductivo.

d) Obstáculo de la razón y proporción

Las proporciones se expresaban «retóricamente» a las relaciones establecidas (por ejemplo: el teorema de Thales), pasando posteriormente a expresiones como a:b : c:d perdurando desde la matemática Helénica hasta el siglo XV.

e) Obstáculo la algebrización de la geometría

Se considera a la semejanza como una simple traducción algebraica de la relación entre los elementos de una figura en un problema geométrico específico. Las relaciones que pueden establecerse por este método, corresponden estrictamente a las relaciones internas entre los elementos de una figura dada.

La semejanza como objeto de enseñanza

En cuanto al tratamiento del tema en la Educación Media Superior, la semejanza, aparece como un método para resolver problemas de construcciones geométricas desde el punto de vista sintético. Se aprecia una cierta influencia de la Geometría Euclidiana, donde el teorema de Thales genera nuevos conceptos, aunque no en todos los casos se alude a éste, puesto que, la justificación de los criterios de triángulos semejantes se apoyan en él, sin incluir el estudio de las figuras homotéticas.

Hemos identificado en este nivel educativo la aproximación a la semejanza dentro de la relación intrafigural. Las figuras que abundan en los textos revisados aparecen en configuraciones de Thales y posiciones separadas.

En síntesis, para el estudio de la semejanza como objeto de enseñanza, tomamos en cuenta los resultados del análisis histórico-epistemológico, en donde identificamos tres momentos distintos en el concepto «semejanza», desde ellos es posible determinar tres aproximaciones que, creemos, deben tenerse presentes cuando se considera la semejanza como objeto de enseñanza:

a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante en ausencia de la idea de transformar una figura en otra.

b)Transformación geométrica vista como una herramienta. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en sí mismo. Se utiliza la semejanza como una herramienta en la resolución de problemas gráficos.

c)Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

El estudio pretende poner de manifiesto la cantidad de restricciones que pesan en la enseñanza del concepto de «semejanza», así como su desplazamiento, el cual se ha hecho a voluntad de los cambios curriculares que se han impulsado en México en el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo XXI

Bell, E. T. (1999). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme y W. Vanhamme (Eds.). La problématique et l´enseignement des mathématiques. *Comptes Rendus de la XXVIIIe Rencontre organisée par la CIEAEM*, (pp.101-117). Louvian la Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 164-198.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse pour obtenir le grade de docteur. France. Université Bordeaux 1.

Hilbert, D. (1902). *The foundations of geometry*. USA: Kessinger Publishing.

Klein, F. (1872). *Le programme d´Erlangen: considerations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. París: Prefacio de J. Dieudonné.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11 (2.3), 295-324.

Monge, G. (1820). *Géométrie descriptive*. Paris: Courcier, imprimeur-Libraire pour les sciences.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis* e *historia de la ciencia*. México: Siglo XXI

René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de foction: analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Québec, Montreal, Canadá.

Rondero, C. (2006). Propuestas didácticas acerca de la articulación de saberes matemáticos. En: R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), I*nvestigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un Reporte Iberoamericano,* (pp. 151-162). México: Díaz de Santos- CLAME, A.C.