CONVERSIÓN DE REGISTROS EN EL CÁLCULO INTEGRAL: LA PROBLEMÁTICA DE LOS SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Melissa Andrade Molina, Alex Montecino Muñoz
Cinvestav del IPN México
mandrade@cinvestav.mx, montecino@cinvestav.mx

Resumen. En esta investigación se indagaron las dificultades al determinar el volumen de un sólido de revolución. Detectamos que los estudiantes no conciben los diferentes significados de f(x) por lo que un papel del docente será resignificarlo como un objeto de imagen o altura y no sólo como la función "a integrar". Asimismo, generar mentalmente un sólido provoca conflictos en el traspaso entre dimensiones. Se evidenció que la enseñanza escolar chilena no enfatiza procesos cognitivos como el razonamiento y visualización espacial, soslayando la tercera dimensión que es necesaria para rotar una figura en dos dimensiones en torno a un eje.

Palabras clave: Representaciones semióticas, resignificación, representación, transformación

Abstract. In this research we investigated the difficulties in determining the volume of a revolution solid. We detected that students do not conceive the different meanings of f (x), thus, the teacher's role will be resignify -resignificado- it as an image or height object and not just the function to be "integrate". In the same way, mentally generate a solid leads to cognitive conflicts transferring between dimensions. Was evidenced that the Chilean school education does not emphasize cognitive processes such as reasoning and spatial visualization, ignoring the third dimension is needed to rotate a figure in two dimensions around an axis.

Key words: Semiotic representation, resignification, representation, transformation

Introducción

En esta investigación se indagan las dificultades que presentan algunos estudiantes para determinar el volumen de un sólido de revolución mediante integrales definidas. El problema fue detectado a partir de una experiencia en aula –en una asignatura de Cálculo II– cuando se produce un debate entre el profesor y un estudiante respecto a ¿qué se hace girar al calcular el volumen de un sólido de revolución con hueco? Lo cual es abordado usualmente por el método de las capas cilíndricas o de la arandela.

En una primera indagación se generó y aplicó un instrumento que corroboró la presencia de obstáculos, de tipo didáctico y epistemológico (Brousseau, 1983), además de conflictos cognitivos, en el sentido de Aguilar y Oktaç (2004, p.3), quienes señalan que la noción del conflicto cognitivo se relaciona con *"un estado de desequilibrio que surge cuando una concepción que tiene un individuo entra en conflicto con alguna otra concepción que lleva el mismo individuo, o bien con el ambiente externo".*

Detectamos que los estudiantes presentan limitaciones al establecer los diferentes significados que toma $f(x)$ en el cálculo integral (*imagen, altura, segunda coordenada de un par ordenado, expresión algebraica de una función*), coartando de esta manera, el traspaso del registro gráfico al registro algebraico. Por lo que un papel primordial del docente, para el caso del tratamiento de la integral definida, será resignificar *f* (*x*) como un objeto de imagen o altura (aspecto geométrico implícito en la gráfica de la función) y no quedarse sólo con el hecho de que *f* (*x*) representa una "función a integrar", además de enfatizar procesos cognitivos como el razonamiento y visualización espacial.

Del análisis del instrumento y de la revisión bibliográfica recabada, se concluye que a los estudiantes les dificulta cambiar de un registro algebraico a uno gráfico, al momento de generar mentalmente el sólido, una de las causas es la ausencia del eje z en el plano cartesiano al hacer rotar una región en torno a un eje, tanto en libros escolares, como en libros de texto e incluso en algunos softwares matemáticos (Andrade y Montecino, 2009).

Lo anterior permite suponer que el no realizar o proponer actividades que involucren un cambio de registros entre los diferentes tipos de representaciones semióticas (Duval, 1999), puede conllevar a conflictos cognitivos al momento de cambiar dimensiones, o más específicamente, en el salto del plano al espacio, lo que denominamos *transformación* (Andrade y Montecino, 2011).

Problemática

El tema a investigar deriva de una experiencia de aula vivida el año 2005, mientras cursábamos la actividad curricular o asignatura de Cálculo II (Contenidos: Integral indefinida; métodos de integración; integral definida; aplicaciones de la integral definida; integrales impropias; integración múltiple), de la Licenciatura en Educación, mención en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez en Santiago de Chile. Un estudiante inició una discusión con el docente con respecto a qué es lo que se hace girar para conformar un sólido de revolución con hueco.

El conflicto que presentó el estudiante radica en el momento de identificar la expresión que debía ser integrada para obtener, en este caso, el volumen de un sólido con hueco, proponiendo una expresión que corresponde al cálculo del volumen de un sólido sin hueco, lo cual se puede apreciar en la siguiente figura.

Forma general:

$$\pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx$$

Propuesta por del estudiante:

$$\pi\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

Figura 1: Fórmulas para calcular el volumen del sólido de revolución
(Andrade y Montecino, 2009, p. 28)

Este suceso develó ciertos conflictos cognitivos, que conllevaron a realizar un estudio en torno a identificar las dificultades que presentan los estudiantes al calcular el volumen de un sólido de revolución, mediante integrales definidas. Donde se busca vislumbrar conflictos para: identificar los significados o roles que está cumpliendo *f* (*x*) y *g* (*x*); al manipular y transitar en los diferentes registros; y cuando se transita del plano al espacio, es decir en la *trasformación*.

Aproximación

Para abordar la problemática mencionada anteriormente, se diseñó un cuestionario que fue aplicado a estudiantes de segundo año del Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez, en Chile, basado en el cálculo de áreas y volúmenes de diferentes sólidos de revolución (con y sin hueco), el que corroboró la presencia de conflictos, en primer lugar, al identificar la "expresión algebraica" que debía ser integrada para obtener el valor numérico del volumen del sólido, y en segundo lugar, al formular imágenes mentales y representación del sólido que se forma.

En ambos caso se hace indispensable una interacción entre los registros algebraico y gráfico, además de identificar los roles de *f* (*x*) y tener la capacidad de manipular mentalmente los cambios de registros y la trasformación.

Como podemos ver, en una pregunta del cuestionario, se le pidió a los estudiantes que calcularan el área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, lo cual se resuelve mediante la integral definida $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$. Posteriormente, se les pidió que calcularan el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer rotar esa región en torno a $y = 0$, obteniendo en la mayoría de los casos $\pi \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]^2 dx$. Sin embargo, al pedirles que graficaran dicho sólido se obtuvo la siguiente respuesta:

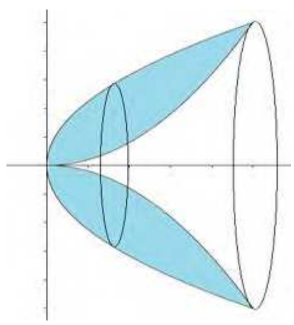

Figura 2: Gráfica propuesta del sólido.

Se puede observar que la integral que corresponde al sólido de la figura 2 es $\pi\int_0^1[\sqrt{x}]^2-[x^2]^2dx$, lo que se contrastó con el sólido con el que realmente estaban trabajando los estudiantes, es decir, el correspondiente a la integral $\pi\int_0^1[\sqrt{x}-x^2]^2dx$ (figura 3).

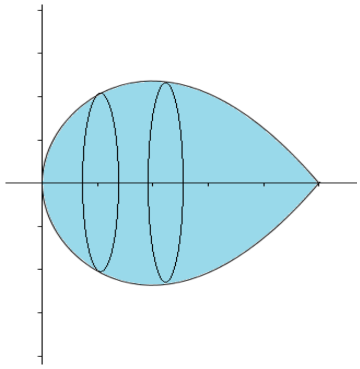

Figura 3: Volumen que calcularon los estudiantes

De las respuestas dadas podemos suponer que:

- no se profundiza en la construcción geométrica de un sólido de revolución con hueco;
- no se propicia instancias que favorezcan a un razonamiento y visualización espacial;
- no se consideran los cambios que suceden al momento de aplicar una transformación.

Por ejemplo en el caso anterior, en el cálculo de área, el $f(x)$ se entiende como las alturas que se encuentran bajo la curva de ancho dx, pero cuando el problema pasa al cálculo de volumen las $f(x)$ representan el radio de las arandelas de ancho dx, es decir lo que se debe entender por $f(x)$ cambia según el contexto en que se esté trabajando, lo que conlleva a otorgar un nuevo significado, es decir, *resignificarlo*; además existe ideas previas que son generalizadas debido al modo que son presentadas dentro del curriculum, podemos ver en diferentes textos que el tratamiento de área y volumen se presentan de forma consecutiva, es decir primero se calculan áreas de figuras planas para luego trabajar con el cálculo de volumen, lo que podría inducir a pensar, que es el área lo que se hace girar, o lo que se mueve, para obtener el sólido (Andrade y Montecino, 2009), esta idea es reforzada por algunos libros sin detenerse a analizar lo que está presentado.

> […] se presenta la definición de este concepto con entendimientos erróneos y confusos para el estudiante, por ejemplo: *"Un sólido de revolución es generado al hacer girar el área de una figura"* (Ayres, 1991), dejando nula claridad respecto a un eje de rotación, …, más aún, sabiendo que el área representa sólo el valor numérico de una región o superficie, entonces ¿De qué forma podríamos hacer

girar un número para obtener un sólido de revolución? (Andrade y Montecino, 2009, p. 32).

Conclusiones

La aplicación del instrumento llevó a concluir que generar mentalmente los sólidos de revolución no es un proceso inmediato, ya que, lo que produce mayores conflictos es el traspaso entre dimensiones, *trasformación*, tanto mental como escrito. Ante esta dificultad, Piaget (1970) señala que, como seres humanos, estamos limitados a visualizar la abstracción de la matemática en dos dimensiones, lo cual, claramente es diferente a nuestra cotidianeidad.

Por otra parte, se hace primordial poder transitar entre registros algebraico y geométrico, pero como se pudo observar no es algo que sea natural entre los encuestados, permitiéndonos suponer que, el no realizar o proponer actividades que involucren un cambio de registros entre los diferentes tipos de representaciones semióticas y el no fomentar el razonamiento y visualización espacial, puede conllevar a conflictos cognitivos al momento de cambiar dimensiones, o más específicamente, en el *salto del plano al espacio* (Andrade y Montecino, 2009).

Además, se identificó que las herramientas que actualmente están inmersas en los salones de clases permiten hacer dibujos bidimensionales que representen un objeto tridimensional o cuerpo geométrico, mediante el uso de perspectiva. Sin embargo, algunas de estas herramientas, tales como calculadoras graficadoras, softwares matemáticos, entre otras, permiten otorgar una visualización dinámica, pero no asegura el logro en la representación mental del cuerpo. Una de las causas es la ausencia del eje z, en el plano cartesiano, al hacer rotar una región en torno a un eje, dificultando la visualización del sólido que se conforma (figura 4). Por ejemplo, Artigue (2004) advierte que el uso de estos recursos se torna insuficiente si no existe un adecuado resguardo por la dimensión epistemológica del objeto a enseñar.

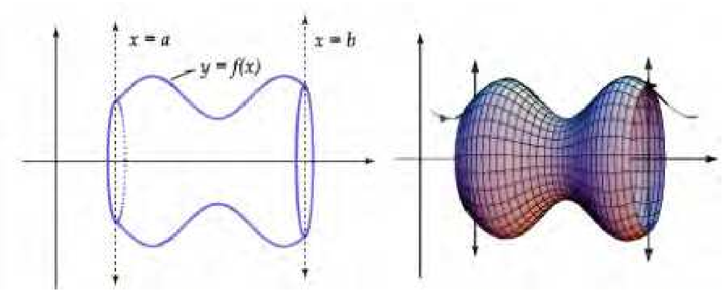

Figura 4: Representación de un sólido de revolución mediante un software matemático. (Andrade y Montecino, 2009, p. 35)

Es así como el abrir un debate sobre el proceso que hemos denominado *trasformación*, permitiría revertir situaciones como las encontradas al indagar sobre temáticas geométricas previas a la enseñanza del cálculo integral, que estuviesen interviniendo en la adquisición y apropiación de este contenido, donde se detectó que en la enseñanza escolar, específicamente en el tratamiento de algunas actividades de las Unidades de: Primer Año Medio, contenido: "Transformaciones Isométricas", Segundo Año Medio, contenido "Semejanza de triángulos"; cuarto Año Medio, Contenido: "Áreas y volúmenes", se da poco énfasis a procesos cognitivos como el razonamiento y visualización espacial, dando poca o nula importancia a la tercera dimensión que necesariamente se utiliza para rotar una figura en dos dimensiones en torno a un eje imaginario, es decir se soslaya el traspaso necesario por una tercera dimensión.

En la evidencia recabada en esta investigación se lograron observar dificultades en representar imágenes o figuras tridimensionales en dos dimensiones y, por consiguiente, la complejidad en plasmarlas en un papel. Por lo que sostenemos que la *transformación* implica, imponer al estudiante un desafío necesario, el cual generaría un conflicto cognitivo al momento de resolver ejercicios que involucren este salto implícito del plano al espacio, es decir de 2 dimensiones a 3 dimensiones.

Por otra parte, se concluye que al abocarse a generar mentalmente los sólidos, a los encuestados les dificultó la conversión de un registro algebraico a uno gráfico, al graficar las funciones para obtener los límites de integración de una región encerrada por dos o más curvas, y viceversa, al encontrar la expresión algebraica a integrar de una superficie. Así también, se detectó que la mayoría de los estudiantes no logra identificar los diferentes papeles que representa $f(x)$, específicamente al calcular el volumen del sólido. Por lo que se considera necesario y primordial para el caso del tratamiento de la integral definida, resignificar $f(x)$, es decir dotar de nuevos significados a $f(x)$, donde se especifiquen aquellos roles que toma por ejemplo en el proceso de transformación o conversión de registros, en otras palabras, dar énfasis a su aspecto dinámico.

Finalmente, sostenemos que aún queda mucho trabajo por hacer en este campo, ya que del presente estudio se desprenden ciertas interrogantes que se espera resolver en investigaciones posteriores:

i) ¿Los estudiantes recurren a la tridimensionalidad para enfrentarse a problemas que requieran de ésta?

ii) ¿es viable construir una propuesta de trabajo, aplicable al aula, que logre potenciar la visualización espacial en los estudiantes?

Referencias bibliográficas

Aguilar, P., y Oktaç, A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (2), 117-144

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.

Andrade, M. y Montecino, A (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, *Actas del XIII CIAEM-IACME* 2011. En: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática* 16(3), 5-28.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 135-149.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Peter Lang.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking*. Basic Issues for Learning. Proceedings of the 21st PME-NA Annual Meeting. Cuernavaca, Mexico.

Piaget, J. (1970). Piaget's theory. En PH Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology* 1, 703-732. New York: Wiley.

Pulido, R. et al. (2001). *Elementos del cálculo. Reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Stewart, J. (2001). *Cálculo: Conceptos y Contextos*. México: Thomson Learning.