

## LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL COMO HERRAMIENTA EN EL ENTENDIMIENTO DE LO TRIDIMENSIONAL

Alex Montecino Muñoz, Melissa Andrade Molina  
Cinvestav del IPN  
montecino@cinvestav.mx, mandrade@cinvestav.mx

México

**Resumen.** El objetivo de este estudio, converge en detectar las dificultades asociadas al uso de la visualización espacial. Realizamos observaciones de campo -desprendidas de un análisis previo- con la finalidad de identificar si la visualización espacial es utilizada como herramienta en actividades que involucran lo tridimensional. En los resultados podemos encontrar que los estudiantes tienen grandes dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional y, más aún, acudir a ella para encontrar la solución de una problemática determinada, por otra parte podemos vislumbrar que no se formaliza la tridimensionalidad durante la enseñanza escolar, lo que obstaculiza la comprensión de ésta.

**Palabras clave:** visualización espacial, recurso pedagógico, representación

**Abstract.** The objective of this study converges detect the difficulties associated with use of the space visualization. We conducted field observations - emerged from a previous analysis, in order to identify whether spatial visualization is used as a tool in activities that involve three-dimensional. In the results, we find that students have great difficulty at work and three-dimensional representation further, go to her to find solving of a given problem, besides the three-dimensionality is not formalized during school education, which hinders the understanding of this.

**Key words:** spatial visualization, educational resource, representation

### Introducción

El objetivo de este estudio converge en detectar las dificultades asociadas al momento de recurrir al uso de la visualización espacial en situaciones de problemas. Con este fin, se realizó un trabajo de observación de campo –desprendido de un análisis previo– el que tuvo como finalidad identificar si la visualización espacial es utilizada como herramienta, por parte de los estudiantes, al enfrentarse a situaciones que pongan en juego sus conocimientos sin involucrar fórmulas algebraicas o patrones de solución para la solución de estas situaciones.

Para llevar a cabo el objetivo del estudio se analizaron los Planes y Programas propuestos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), de Primer Año Básico (NB1) a Cuarto Año Medio (NM4); los textos del Estudiante otorgados por el MINEDUC desde Séptimo Año Básico (NB5) a Cuarto Año Medio (NM4); el Texto de Apoyo del Docente correspondiente a NM4. Siendo el análisis de éstos el sustento para establecer la relación entre los distintos niveles escolares frente a cómo se abordan objetivos, aprendizajes esperados, actividades y contenidos mínimos, para posteriormente identificar si están direccionados a generar o propiciar una visualización espacial en los alumnos.

### Resultados del análisis de los Planes y Programas y Textos Escolares

De la revisión se identificó que no existe un trabajo profundo que propicie cambios de registros entre los diferentes tipos de representaciones, conllevando a conflictos al momento de cambiar dimensiones, más específicamente, el salto del plano al espacio. Así mismo, de este análisis se logra evidenciar que se priorizan ciertos contenidos, poniendo especial énfasis en desarrollar las competencias necesarias en los estudiantes para que logren desenvolverse exitosamente en pruebas estandarizadas a las que deberán enfrentarse durante su formación escolar. Por consiguiente, se puede concluir que no se ahonda en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, conllevando a que los estudiantes no desarrollen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional. Por ejemplo, en aquellas actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano sólo se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes y descomposición de cuerpos.

Teniendo en consideración estos antecedentes se aplicaron dos problemas, a estudiantes de NB5, NB6, NM3 y NM4, que involucran el uso de la tridimensionalidad.

### Muestra y actividades aplicadas

La muestra en total fue de 76 estudiantes, de los cuales 59 se encontraban cursando séptimo y octavo básico y 17 cursaban tercero y cuarto medio. El desarrollo de la experiencia fue registrado mediante observaciones de campo de tipo descriptiva, ya que se narró, mediante notas de campo, los sucesos tal y como ocurrieron durante su transcurso, destacando sólo la información que se estimó relevante para llevar a cabo el análisis.

Las actividades aplicadas consistieron fundamentalmente en enfrentar a los alumnos a dos situaciones en las que fuese vital, como herramienta o recurso de solución, la visualización espacial. La primera actividad involucra un problema de ingenio propuesto en jornadas de educación matemática, cuya solución subyace en el pensamiento tridimensional, siendo este pensamiento el que propicia buscar solución en un contexto tridimensional. La segunda, corresponde a un problema de construcción geométrica que se resuelve mediante la manipulación de materiales tangibles, por lo que la carencia de visualización mental del espacio propicia dificultades que, en algunos casos, impiden aproximarse a la solución.

Se seleccionaron estos problemas a fin de dar cuenta que a una parte no menor de estudiantes, ya en niveles finales de enseñanza básica y de enseñanza escolar, no les es inmediata la visualización mental de cuerpos tridimensionales, por lo que creemos tienden a trabajar y a pensar en dos dimensiones, es decir, sobre el plano, a pesar de que el mundo que

les rodea tiene a lo menos tres variables: anchura, altura y profundidad. Por consiguiente, ambas actividades requieren un quiebre al pasar del plano al pensamiento espacial.

La primera actividad se aplicó a los niveles de séptimo y octavo año básico, con el fin de establecer un punto de referencia sobre las habilidades para desenvolverse en el espacio. Por otro lado, al indagar acerca de la visualización espacial de los estudiantes que se encuentran cursando los últimos años de enseñanza escolar, consideramos que el primer problema no era muy adecuado ya que anticipamos, por experiencias previas, que los estudiantes se entraparán en algunas propiedades como que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ , distinguiendo la presencia de obstáculos que pudiesen impedir hallar la solución del problema planteado. Es por esta razón que se decide aplicar el segundo problema a los estudiantes de tercero y cuarto medio. Teniendo en cuenta que vivimos personalmente esta situación pudiendo constatar que no sólo a estudiantes de enseñanza escolar o superior les es difícil pensar en tres dimensiones, sino que también a profesores, filósofos, psicólogos, que compartieron esa experiencia con nosotros. Sin embargo, para corroborar nuestras conjeturas iniciales sobre el primer problema, decidimos aplicarlo, durante el transcurso de la clase, a tercer año medio.

Los resultados obtenidos pusieron en manifiesto ciertas falencias respecto a hacer uso de la tridimensionalidad como recurso o herramienta para la solución de una situación problemática, ya que sólo surge ésta luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano. Esto puede deberse a que durante la enseñanza escolar los problemas, ejemplos y trabajos se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado, por otra parte la centralización existente a las pruebas estandarizadas, la que favorece a un carácter utilitario de las matemáticas, es decir, hace ver a la matemática como una herramienta para resolver problemas que pueden situarse dentro de la matemática o de otros contextos, pero no permite la visión de que el conocimiento se construye para transformar la realidad, por ende, no se reflexiona sobre su construcción ni su funcionalidad, teniendo como consecuencia la existencia de un predominio dentro del discurso matemático escolar (dME) que deriva en una memorización de algoritmos, propiedades y conceptos, conllevando a que no se propicien instancias donde los constructos que se están construyendo tengan una significación que dependa de un contexto determinado (Soto, 2010).

### Resultados de la aplicación de la primera actividad

En el caso de la primera actividad, el problema fue planteado de la siguiente forma: *“Un hombre se encuentra con un oso, para escapar de él corre 10 kilómetros hacia el sur, luego gira en  $90^\circ$  hacia el este y corre 10 kilómetros en esa dirección, luego gira  $90^\circ$  hacia el norte y corre otros 10 kilómetros*

y finalmente se encuentra con el mismo oso. ¿De qué color es el oso?” (Andrade y Montecino, 2009, p. 103), las respuestas giraron principalmente en torno a:

- ❖ Las que se limitan a dar cuenta del recorrido que realiza el sujeto, distinguiéndose al menos dos tipos: el recorrido del hombre según los ángulos (ver Figura 1) o bien el recorrido del hombre según los tramos recorridos (ver Figura 2).

“R// Es café porque el resultado de caminar tanto(...) una C de café”

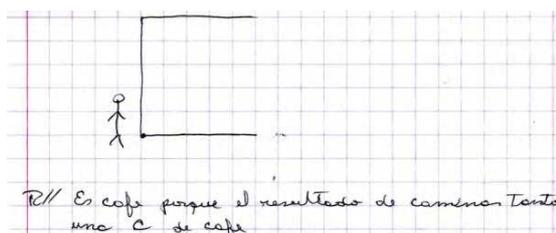


Figura 1: Recorrido del hombre según los ángulos  
(Andrade & Montecino, 2009, p. 105)

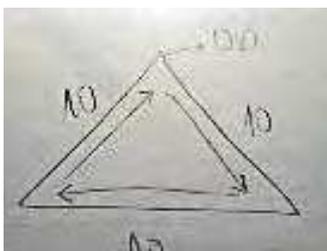


Figura 2: Recorrido del hombre según los tramos recorridos  
(Andrade y Montecino, 2009, p. 105)

Por ejemplo unos estudiantes dijeron: “esto fue lo primero que hicimos, pero nos dimos cuenta que el oso debía cambiar de lugar”; “Entonces, para que el oso sea el mismo, el hombre debe haber hecho este movimiento, o sea un triángulo” (Andrade y Montecino, 2009, p. 105).

- ❖ En algunos casos se obtuvieron respuestas que revelaban el uso de lo tridimensional (ver Fig.3), tales como: “la única forma es que si camina en la tierra, entonces hace un movimiento así (dibuja una curva del centro a uno de los polos) entonces ahí sí se puede, pero no sabemos de qué color es el oso”; “El hombre camina en forma de triángulo, porque recorre tres veces 10 kilómetros y llega al mismo punto, para que los ángulos sean de  $90^\circ$  entonces debería ser con las capas de la tierra” (Andrade y Montecino, 2009, p. 105).

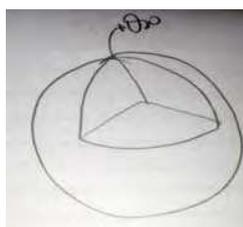


Figura 3: Superficie esférica

(Andrade y Montecino, 2009, p. 105)

En total una minoría de alumnos convergieron a la solución correcta, sin embargo, el objetivo de proponer esta actividad era ver si los alumnos utilizaban la visualización espacial como recurso para obtener la solución a un problema. Si bien en muchas ocasiones se pudo apreciar que parte de los estudiantes vislumbraban que no era factible encontrar una solución en el plano, no fueron capaces de dar el salto a lo tridimensional.

En términos generales, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes no logran desprenderse de un pensamiento bidimensional, es decir, abandonar el plano, y menos aún, intuir la posibilidad de un trabajo sobre una superficie esférica, por ejemplo, una vez finalizada la actividad, un estudiante manifestó: *“Nunca se me hubiese ocurrido hacer el movimiento en la tierra”* (Andrade y Montecino, 2009, p. 106).

Además, se detectó que en los estudiantes hay conceptos arraigados que en esta ocasión, generan un *obstáculo* (Brousseau, 1983, 1986) para el trabajo asignado, como lo es el haberse apropiado de que toda suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a  $180^\circ$ , enseñada y enfatizada durante la presentación y trabajo de triángulos durante la enseñanza escolar, por ejemplo al momento de presentar las soluciones surgen comentarios como: *“pero no que la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe ser  $180^\circ$ , y ahí se pasa”* (Andrade y Montecino, 2009, p. 128).

### Resultados de la aplicación de la segunda actividad

En el caso de la segunda actividad, presentado de la siguiente forma: *“Construir cuatro triángulos congruentes con seis segmentos del mismo largo (la medida de los palitos)”* (Andrade y Montecino, 2009, p. 106), sus materiales eran 6 palitos de igual medida, forma y tamaño. Este problema revela que los estudiantes no son capaces de utilizar la tercera dimensión como primer recurso para su solución, los estudiantes tienden a solucionar el problema utilizando figuras planas, surgiendo luego la necesidad de utilizar la tridimensionalidad para converger a la resolución de éste. Coincidiendo con lo que plantean Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) al señalar que lo tridimensional surge por la necesidad de representar su entorno en tres dimensiones.

Cabe resaltar que este proceso no es inmediato, para algunos alumnos no se hace evidente el uso de la visualización espacial. Viéndose esto reflejado por ejemplo en lo comentado por un estudiante el que manifiesta: “Que extraño que en lo primero que uno piensa es en buscar figuras que sean familiares, yo no llegué al tetraedro y nunca se me pasó por la cabeza salir del plano” (Andrade y Montecino, 2009, p. 106).

Por otra parte se puede evidenciar la manipulación de las propiedades de figuras planas a fin de obtener la solución del problema. Por ejemplo, al dibujar un cuadrado y trazar sus diagonales, afirmando que se forman cuatro triángulos congruentes, revela que el estudiante está comprendiendo que un triángulo rectángulo puede tener todas las medidas de sus lados de igual longitud. Por el contrario, algunos a pesar de no confluír a una solución, son capaces de contraponer los resultados de sus compañeros con las propiedades de la geometría euclidiana. Por ejemplo un estudiante confronta a su otro compañero diciendo: “pero las diagonales de un cuadrado no miden lo mismo que sus lados” (Andrade y Montecino, 2009, p. 107).

Las figuras obtenidas en la aplicación de esta actividad, en terceros y cuartos medios, fueron las siguientes:

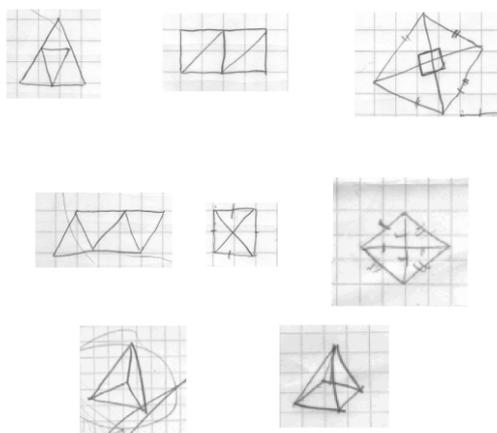


Fig. 4: Figuras planas y cuerpos obtenidos por los estudiantes  
(Andrade y Montecino, 2009, p. 107)

## Conclusiones

En los resultados de esta investigación podemos encontrar, por una parte, que los estudiantes tienen grandes dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional y, más aún, acudir a ella para solucionar una problemática, se evidenció que los estudiantes utilizan la tridimensionalidad luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano. Y, por otra parte, no se formaliza la tridimensionalidad durante la enseñanza escolar, lo que obstaculiza aún más la comprensión de ésta. Es por ello que Andrade y Montecino (2009, 2011) concluyen que es

indispensable un desarrollo de la visualización espacial y su uso como recurso pedagógico, el cual propicie y dé herramientas para entender lo tridimensional.

Dentro de los textos analizados –planes y programas de estudio, textos escolares para el estudiante y para el docente– podemos concluir que no se profundiza en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, lo que implicaría que los estudiantes no desarrollen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional. Las actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes, descomposición de cuerpos, además, se identifica la presencia de figuras prototipos. Creemos que es necesario establecer un trabajo interdisciplinario con el Subsector de Artes Visuales, donde se torna de vital importancia el disponer de una visualización espacial que permita desenvolverse en el uso de la perspectiva, para que el estudiante desarrolle sus capacidades y habilidades en torno a trazar en el plano la realidad que le rodea, lo que implica que se hará más fluido el visualizar las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos (Andrade y Montecino, 2011).

En algunos niveles de enseñanza escolar, no se profundiza en el desarrollo de la visualización espacial en los estudiantes, sino que se propicia el cálculo de áreas y/o volúmenes, mediante fórmulas. Por otro lado no se proponen actividades a fin de evaluar lo tridimensional en los estudiantes, como se dijo anteriormente se prioriza el trabajo con algoritmos y memorización de propiedades, por sobre el desarrollo, en este caso, de un pensamiento geométrico.

Se hace necesario profundizar en un pensamiento geométrico, donde se construyan herramientas para manipular e interpretar la realidad, ya que éste se utiliza como recurso para la solución y comprensión de ejercicios de otros saberes matemáticos, por ejemplo, simetría de cuadriláteros. Además podemos ver que el dME privilegia algunos tipos de argumentaciones, significados y procedimientos, imponiendo una situación que no permite la inclusión del estudiante en su construcción del conocimiento matemático (Soto 2010).

Así mismo, podemos ver que dentro del dME no se propician la visualización de cuerpos geométricos desde distintas perspectivas, ya que en diferentes textos conllevan a la misma imagen del cuerpo, representándolos desde un mismo punto de vista (prototipo). Lo que interviene en que se aprenda o memorice sólo una representación para cada cuerpo.

De la aplicación de los problemas de tridimensionalidad, se detectó que gran parte de los estudiantes que participaron en la actividad, presentan dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional, en otras palabras, en manipular y acudir a ésta para solucionar una situación problema. Uno de los factores que, creemos, influye directamente es que los estudiantes no son capaces o no les es inmediato desarraigarse de las preconcepciones

heredadas del trabajo en dos dimensiones, además que durante la enseñanza escolar los problemas, ejemplos y trabajos se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado y no con el bagaje y preconcepciones que el estudiante tiene.

Se puede evidenciar que el estudiantado presenta dificultades referentes a la manipulación de las representaciones en el plano de cuerpos geométricos tridimensionales, sobre todo al dibujarlas. En consecuencia, es indispensable que los estudiantes desarrollen las habilidades y competencias para dibujar e interpretar las representaciones en el plano de los cuerpos tridimensionales y, de esta manera, obtener las herramientas necesarias para comprender, visualizar y manipular las representaciones icónicas y/o gráficas de la geometría espacial y con ello el estudio de saberes matemáticos avanzados.

Es por lo anterior mencionado que se hace indispensable incluir nuevas formas de enseñanza o apoyo para el aprendizaje del estudiante, que favorezca percibir las matemáticas, específicamente lo referente a lo geométrico, de manera dinámica y variable (Andrade & Montecino, 2009, 2011).

### Referencias bibliográficas

- Andrade, M. y Montecino, A. (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.
- Andrade, M. y Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, *Actas del XIII CIAEM-IACME 2011*. En: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf>.
- Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, DIE-Cinvestav.
- Brousseau, G. (1986). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. La problématique et l'enseignement des mathématiques, *Actas del XXVIII CIEAEM*.
- Lowenfeld, V. y Brittain-Lambert, W. (1980). Desarrollo de la capacidad creadora. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.
- Ministerio de Educación (2004). Programas de Estudios de Educación Matemática, desde Primer Año Básico a Cuarto Año Medio. Chile.
- Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.