I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana
ICMI

El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones

Sergio Damián **Chalé** Can
Centro de Investigación y de Estudios Avanzado, Cinvestav
México
schalecan@gmail.com

Claudia Margarita Acuña Soto
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav
México
claudiamargarita_as@hotmail.com

Resumen

En este trabajo, presentamos los resultados de investigación de una tesis de maestría realizada en México. Nuestro objetivo fue indagar cómo los estudiantes del Nivel Medio Superior, analizan secuencias de crecimiento visual, con base en representaciones gráficas, así como la forma en que expresan algebraicamente el patrón que subyace a una secuencia; teniendo como supuesto que el análisis visual organizado de las secuencias puede contribuir a la detección, formulación y generalización de patrones. Con base en nuestros resultados, afirmamos que la visualización juega diferentes papeles dentro del proceso de generalización, los cuales identificamos y clasificamos a la luz de la Teoría de la Objetivación y la Teoría de la Representaciones Semióticas. Proponemos una herramienta para discutir el papel y funcionamiento de la visualización en la generalización de patrones.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, generalización, visualización, patrones geométricos.

Introducción

En el currículum actual mexicano de educación media básica (12-15 años) y educación media superior (15-18 años), la introducción al álgebra se sugiere a partir de la generalización de secuencias numéricas y geométricas (Secretaría de Educación Pública, 2010). La generalización de patrones es usada como una ruta de aprendizaje hacia al álgebra y la idea principal que subyace a esta aproximación es que cierta experiencia con la exploración de los patrones podría llevar al desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2008).

En este tipo de tareas, a los estudiantes se les pide predecir el elemento siguiente en un conjunto ordenado de figuras o números. Posteriormente, hay que establecer la regla que subyace a la secuencia, la cual permite encontrar la cantidad total de elementos que la conforman y finalmente generalizar, esto es, escribir tal regla con palabras o símbolos algebraicos para determinar el valor de un elemento de la secuencia en una posición arbitraria.

El tratamiento dado a las representaciones gráficas o figuras suele ser superficial, debido a que rara vez se pone atención a las interpretaciones que los estudiantes hacen de la representación gráfica, se da por hecho que el estudiante rápidamente observa cuáles son los cambios entre dos figuras consecutivas. Uno de los problemas que enfrentan los estudiantes, es que el proceso de detección del patrón que subyace a una secuencia a partir del análisis de figuras no es espontáneo. Existe una desconexión entre lo que se ve y lo que se está generalizando, lo cual consideramos se debe a que durante el abordaje de este tipo de tareas, no se interpreta de manera adecuada los elementos gráficos involucrados. En nuestra opinión, el análisis visual de la organización de una secuencia de figuras es de suma importancia, puesto que la relación existente entre la posición de los objetos y la razón de crecimiento de la secuencia, podría emerger del análisis visual de los elementos de la secuencia. Suponemos que se requiere desarrollar cierta habilidad para realizar esta tarea y que ésta puede ser adquirida.

En este trabajo, indagamos concretamente sobre cómo los estudiantes analizan secuencias de crecimiento desde el punto de vista visual, con base en las representaciones gráficas, así como la forma en que expresan algebraica o aritméticamente los patrones involucrados. Deseamos también detectar los problemas que tienen los estudiantes cuando interpretan bajo esta modalidad una secuencia y tratan de encontrar la expresión algebraica que la modela.

Antecedentes

La enseñanza y aprendizaje del álgebra ha sido siempre un tema relevante en la investigación dentro de la Educación Matemática, se ha tratado de dar respuesta a la pregunta ¿cómo se construye el significado de los conceptos algebraicos? y ¿cuál es la naturaleza del pensamiento algebraico? Los acercamientos a estas preguntas han sido realizados a través del análisis de la construcción de los conceptos y los procedimientos relacionados con ellos, así como la manera en que los estudiantes construyen simbolizaciones de los objetos algebraicos (Kieran, 2006).

A lo largo del tiempo, se han identificado varias tendencias de investigación dentro de la temática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, por ejemplo la desarrollada en los años 80's, en la cual la generalización llegó a ser el centro de atención de las investigaciones realizadas en ese periodo. El uso de la notación algebraica fue visto como una herramienta para expresar pruebas, patrones figurales y para justificar las formas simbólicas equivalentes de las relaciones entre patrones. Desde entonces diversas investigaciones se han realizado bajo la hipótesis de que la generalización de patrones numéricos y la formulación simbólica de relaciones entre las variables podrían llevar a los estudiantes a desarrollar las capacidades necesarias para el desarrollo de la generalización algebraica (Rinvlod, 2011; Stylianou, 2011; Bell, 2011; Smith, Hillen & Catania, 2007; Ling & Yang, 2004; Noss, Hely & Hoyles, 1997).

En los trabajos anteriormente citados, notamos que son analizados aspectos didáctico, los cuales involucran a los profesores (Bell, 2011), experiencias empíricas de los estudiantes que cuentan con material manipulable (Smith, Hellen & Catania, 2007) así como el análisis de los procesos de solución y dificultades que enfrentan los estudiantes cuando se desarrollan este tipo de tareas (Lin & Yang, 2004; Stylianou, 2011; Rinvold, 2011; Noss, Hely & Hoyles, 1997). Notamos que pocos trabajos tratan los fenómenos de tipo cognitivo que se hacen presentes cuando se resuelven este tipo de tareas, como por ejemplo la visualización.

Por otro lado, en otras investigaciones se identifican que algunas de las secuencias visuales propuestas no son susceptibles de ser analizadas fácilmente; algunos estudiantes, que son capaces de articular un patrón general o relación en lenguaje natural, tienen dificultades para expresar el patrón o relación en forma simbólica y la formulación algebraica de dichas relaciones es desconectada de la actividad de análisis que la precede. La atención tiende a estar centrada en los atributos numéricos de los patrones, y los profesores recurren a los estereotipos para resolver estos problemas mediante la construcción de tablas de datos numéricos, sin comprender las estructuras que sustentan sus razonamientos o tratamientos (Noss, Healy & Hoyles, 1997).

Fundamentación teórica

Para fundamentar nuestra investigación recurrimos a elementos teóricos que se han desarrollado dentro de la Teoría Cultural de la Objetivación y de la Teoría de las Representaciones Semióticas. Estas dos posturas nos proporcionaron elementos para discutir acerca de la construcción del pensamiento algebraico con apoyo en la generalización de patrones incluyendo actividades de visualización.

La Teoría de la Objetivación

La Teoría de la Objetivación, es una teoría de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se inspira en escuelas antropológicas e histórico culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología que dan lugar, por un lado a una aproximación antropológica del pensamiento, y por otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje.

En esta teoría, el aprendizaje se concibe como una adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo, guiadas por modos epistémicos culturales históricamente formados, es una *praxis cogitans*, esto es una práctica social. De manera más precisa el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. Particularmente está guiada por modos epistémicos-culturales históricamente formados (Radford, 2006a).

De acuerdo con la ideas desarrolladas por Radford (2000) el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. La naturaleza del pensamiento algebraico emergente en los estudiantes, es una forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas.

Son tres las características que hacen distintivo al pensamiento algebraico, siendo estas no exhaustivas, la primera se refiere a un sentido de *indeterminación,* la segunda es la *analiticidad* y la tercera es el *modo simbólico* en la cual se designa a los objetos en el álgebra (Radford, 2006b).

La generalización de patrones

Para realizar la generalización de un patrón, en la etapa inicial del análisis de éste, los estudiantes deben centrarse en una propiedad invariante o relación dentro del patrón, tomar algo en común o una regularidad, notar y llegar a ser conscientes de sus propias acciones en relación con el fenómeno sometido a generalización (Rivera & Rossi, 2008).

Se han identificado diferentes niveles de generalización en los patrones, los cuales "consisten en grados de manifestación de lo general y son caracterizados por los símbolos a los que los estudiantes recurren para conseguir sus generalizaciones" (Radford, 2006b, p. 16).

Son tres los niveles de generalización que el autor identifica: 1) La *generalización factual*, en la cual el discurso no vas más allá de ejemplos particulares, sólo se tiene un grado elemental de generalidad. 2) La *generalización contextual*, es aquella que ocurre cuando aparecen gestos que ayudan a los estudiantes a comprender las relaciones que ocurren dentro del patrón, en combinación con el discurso y la visión. Por último, 3) La *generalización simbólica*, se refiere a expresar la generalización a través de símbolos alfanuméricos, el cual es un proceso complejo en el que se decide acerca del significado de las letras.

La visualización

Nuestro interés está centrado en entender la forma cómo los estudiantes analizan las secuencias de crecimiento desde el punto de vista visual, siendo para nosotros un factor muy importante la actividad cognitiva de la visualización, la cual juega un rol principal en la resolución de este tipo de tareas.

La visualización es una organización de una cadena de unidades (palabras, símbolos y proposiciones), que implica tomar toda una estructura y comprender sus relaciones (Duval, 1999). Este autor propone cuatro tipos de aprehensión y tres procedimientos visuales sobre las figuras: la mereológica, la óptica y la relacionada con el lugar.

Para analizar la detección visual de los patrones nos ocuparemos especialmente de la forma mereológica, la cual consiste en dividir toda una figura dada en sub-figuras que pueden ser reorganizadas, dando lugar a nuevas figuras distintas a la figura original.

En adelante discutiremos el papel de la visualización en la generalización de patrones, propondremos una herramienta para caracterizar a la visualización cuando aparece en los diferentes niveles de generalidad sugeridos por Radford y las formas como ella actúa en la generalización de patrones.

Diseño y metodología

Diseñamos una investigación cualitativa que llevamos a cabo en el nivel medio superior en la Ciudad de México. Las actividades fueron propuestas a 36 estudiantes de este nivel, a los cuales se les pidió analizar las secuencias que les presentamos, poner por escrito la regla que seguían tales secuencias y expresar en símbolos algebraicos esa regla. En el tipo de secuencias presentadas, el elemento visual jugaba un rol central y cada vez más importante conforme se avanzaba en la solución de las actividades propuestas.

El objetivo general de las actividades, fue investigar cómo los estudiantes organizan la información visual, cuando deben encontrar el patrón de una secuencia de representaciones gráficas, además de investigar la influencia de la representación gráfica en la resolución de la actividad propuesta.

Para mostrar la manera en la cual se desarrolló esta actividad, así como el uso del instrumento que considera los niveles de generalización antes mencionados, referiremos a la actividad de un estudiante que reportamos a continuación.

Resultados y discusión

A partir de los niveles de generalización propuestos por Radford y las operaciones visuales propuestas por Duval, detectamos tres formas de cómo influye la visualización en el proceso de resolución de secuencias gráficas en la introducción al álgebra. Las cuales organizamos en tres momentos estratificados: visualización de estructuras numéricas, visualización de relaciones contextuales y visualización de organizaciones simbólicas.

Enseguida mostraremos el tratamiento dado a la Actividad mostrada en la *Figura 1* por parte de los estudiantes. En ella, se pedía al estudiante continuar la sucesión que se mostraba al inicio de la misma, calcular la cantidad de cuadros para los elementos siguientes, y explicar con un mensaje escrito el patrón que sigue la secuencia, para finalizar con la expresión algebraica que modela ese patrón.

5. Analiza la sucesión representada en la **Figura 5** y responde las preguntas que se plantean a continuación.

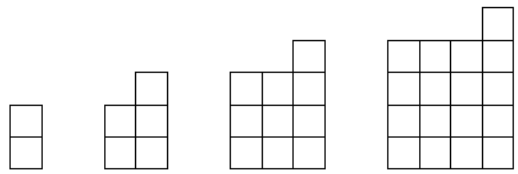

Figura 5

a. Dibuja el quinto y sexto elemento, ¿cuántos cuadritos tiene cada uno?

Quinto elemento	Sexto elemento
Cantidad de cuadritos:	Cantidad de cuadritos:

b. ¿En la figura hay algo que siempre permanezca constante? Señala en las figuras marcando con tu lápiz.

c. ¿Qué varía en la figura? Señala en las figuras pintando de otro color diferente a tu lápiz.

d. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier elemento de la secuencia.

e. Escribe una fórmula para calcular la cantidad de cuadritos en cualquier elemento de la sucesión.

Figura 1. Actividad

En un primer momento, como se muestra en la *Figura 2,* el estudiante usa marcas sobre el conjunto de figuras presentadas, además de realizar un análisis numérico entre los elementos de las figuras que corresponde a las diferencias entre los elementos de la secuencia. El estudiante analizó las diferencias numéricas para encontrar relaciones entre ellas y a partir de esto, llegar a expresar de manera simbólica la regla del patrón. Por medio del uso del método numérico, es posible hallar la expresión algebraica que modela el crecimiento de la secuencia presentada, sin embargo los estudiantes no pudieron hallarlo a partir del análisis numérico.

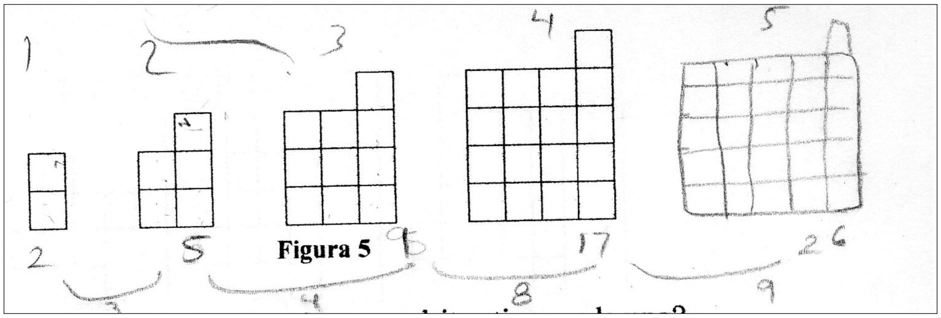

Figura 2. El método de las diferencias usado por los estudiantes

Aquí, el estudiante está en un nivel básico de la generalización de patrones, lo que Radford ha llamado la generalización factual, el estudiante en este nivel fue capaz de predecir elementos cercanos de la secuencia de figuras, pero aun no llega a un nivel de generalización avanzado. La actividad visual emerge como una base para analizar y verificar propiedades numéricas; y es usada como entorno de experimentación y validación de lo supuesto sobre la secuencia gráfica. El estudiante discrimina los elementos gráficos de la secuencia en una especie de reconfiguración con una parte fija y una variable, a partir de propiedades que pueden ser numéricas o no, como se muestra en la *Figura 3*.

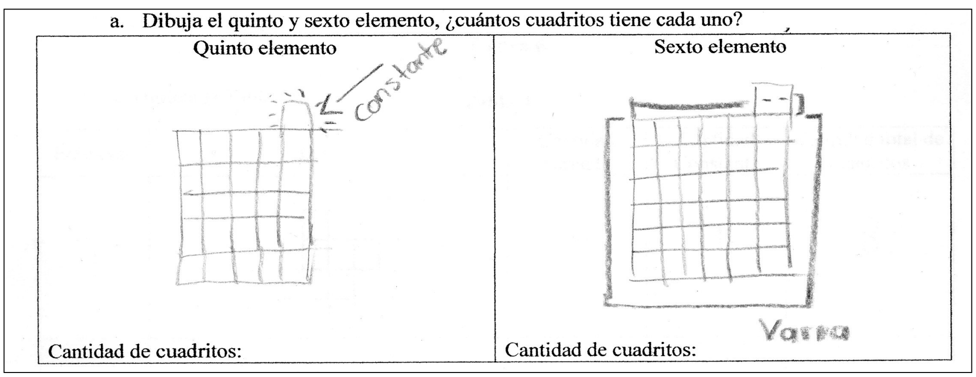

Figura 3. Discriminación de subfiguras constantes y variables

En un segundo momento, como puede notarse en el extracto que presentamos líneas abajo, el recurso aritmético fue abandonado (líneas 6 al 7) y se recurrió al análisis visual para construir la fórmula que modela el crecimiento de la secuencia (líneas 4 y 9).

1 **I (Investigador):** A ver, ¿cómo lo contaste?

2 **A (Alumno):** Yo lo relacioné, porque aquí la diferencia es de… uno y aquí es cuatro, la diferencia es de tres cuadros (*cuenta la cantidad de cuadros en el primer elemento y el segundo elemento y realiza la diferencia*). Aquí la diferencia es de cinco cuadros (*entre el segundo y tercer elemento de la secuencia*). De aquí para acá la diferencia sería 7, y de aquí para acá la diferencia sería 9. La diferencia va aumentando en dos.

3 **I**: ¡Ajá! Son números impares. ¿Y la fórmula?

4 **A**: La fórmula sería, C es la cantidad de cuadritos, que es igual a n, que es el número de la posición, por n, que es igual al número de la posición, más uno. Que nos daría la cantidad de cuadritos.

$$C_{\blacksquare} = n \times n + 1$$

5 **I**: ¿Qué tienen que ver esas diferencias con tu fórmula?

El estudiante se queda pensativo, no responde.

6 **I**: Entonces estas diferencias ya no te sirvieron para tu fórmula o ¿qué pasó?

7 **A**: Ya no.

8 **I**: ¿Ya no?

9 **A**: Ah bueno, lo que pasó, es que nada más fueron las diferencias que nosotros encontramos, pero ya para sacar la fórmula nosotros sólo nos basamos en los lados de la figura.

10 **I**: ¿Los lados?

11 **K**: Ajá, o sea el número de la posición que daba. Supongamos que es cuatro (*la posición*) por el número de cuadritos en el lado de la figura, más uno.

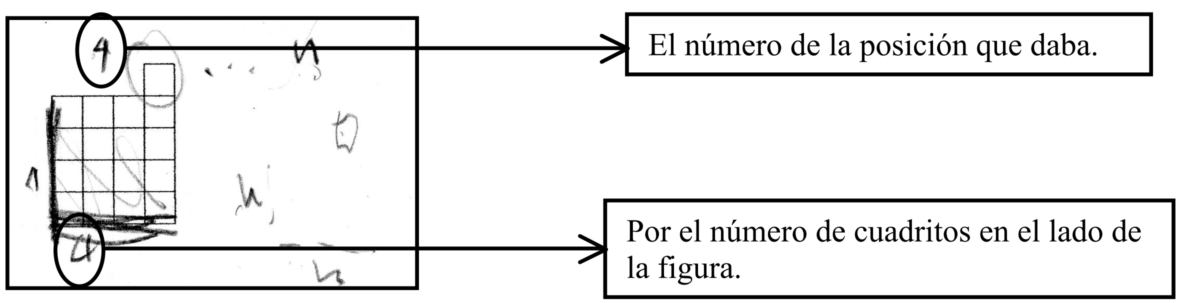

Figura 4. Interpretación de un alumno

En este caso, para el estudiante, fue más útil el análisis visual y la descomposición de las figuras, como se muestra en la *Figura 4,* que el método de diferencias ensayado antes. El análisis visual le permitió construir argumentaciones y explicaciones, y no solamente realizar avanzadas técnicas aritméticas que lo llevaran a la solución de la actividad planteada.

En un tercer momento y como resultado de todo el proceso de reflexión realizado por el estudiante, emerge la expresión de la regla que sigue el patrón en un lenguaje alfanumérico. La expresión de la regla surge de un análisis que primero tomó en cuenta los elementos numéricos del patrón, posteriormente se abandonó esta postura y el análisis visual llevó a identificar los elementos necesario para expresar la regla del patrón en términos algebraicos (Líneas del 1 al 4). Además, notamos una necesidad constante de los estudiantes por transitar entre lo numérico y las representaciones geométricas, para darle forma a la idea que organiza lo constante y lo variable de la secuencia.

Discusión

Como se ha mencionado líneas arriba, el primer acercamiento del estudiante a ésta actividad que propusimos fue por medio de un análisis numérico, el cual posteriormente fue abandonado, puesto que no permitió construir relación alguna que modelara el crecimiento de la secuencia presentada. Consideramos que lo anterior se debió a que hubo una desconexión entre lo que ocurría en los elementos de la secuencia y los números que se analizaban. Posteriormente, el abandono de éste método por parte del estudiante, dio lugar a un análisis visual.

En la primera etapa de la resolución de la actividad, afirmamos que la visualización emergió como una herramienta que permite discriminar algunas partes de los elementos de la secuencia, a partir de propiedades numéricas, lo que nosotros hemos llamado visualización de estructuras numéricas.

En una segunda etapa, conforme el estudiante avanzó en el análisis de la secuencia, el recurso visual fue tomando importancia como elemento que evidencia, da forma y justifica sus argumentaciones, ayudando a describir la variación presente en la secuencia. La aplicación de operaciones visuales, ayuda a establecer un orden y a organizar una forma de visualizar la secuencia.

En esta etapa, el estudiante aplica una forma de análisis mereológico, donde la descomposición de la figura en partes lo lleva a una comprensión más profunda de las relaciones que existen entre los componentes de la secuencia. Notamos que el argumento aritmético, no es abandonado totalmente por el estudiante, aparece siempre en combinación con los argumentos visuales, para dar sentido y justificar las argumentaciones que explican el crecimiento de la secuencia. La actividad visual emerge como algo que liga la posición de los elementos de una secuencia con la numerabilidad de ellos mismos. Esta asociación tiene la característica de conservar cierta particularidad, pese a utilizar expresiones generales. A esta forma de analizar viendo, la hemos llamado visualización de relaciones contextuales.

En la última etapa que reconocemos, el estudiante enajena las cualidades numéricas de los objetos observados para centrarse en una metodología que le permite organizar y relacionar los subconjuntos identificados en las etapas anteriores, para destacar y abstraer totalmente la regla que sigue la secuencia. Da sentido y significado a sus símbolos por medio de lo analizado visualmente, lo que hemos llamado visualización de organización simbólica.

Conclusiones

En esta actividad que presentamos, podemos notar cómo la generalización va emergiendo en un constante dialogo con el análisis de las figuras. Lo que varía fue notado (generalización factual), fue hecho lingüísticamente explícito, de manera que fue puesto por escrito en algunas ocasiones y en otras no (generalización contextual) y posteriormente la variación fue representada por medio de símbolos (generalización simbólica).

Consideramos que lo anterior se debió a la forma de usar la información gráfica, ya que el proceso de visualización fue más allá de sólo notar la organización de los elementos. No solo se tiene un acercamiento a la figura de manera local, sino que los estudiantes logran una apreciación local-global dentro de la secuencia, es decir, lo que ocurre dentro de la estructura de un elemento de la secuencia, lo local, es extendido a todos los elementos siguientes, para ser visto como una característica global de todo el patrón de crecimiento. Esto, para nosotros es un paso importante que todos los estudiantes deben dar, y damos evidencia de que es posible realizarlo a partir de procesos de visualización.

La forma como participa la visualización en el proceso de generalización de secuencias gráficas, es variada. En cada nivel de generalización propuesto por Radford, la visualización apareció de diferentes maneras, las cuales llamamos: visualización de estructuras numéricas, visualización de relaciones contextuales y visualización de organizaciones simbólicas, las cuales emergen según el tipo de análisis visual que realice el estudiante.

La visualización de estructuras numéricas, observada en esta investigación, está relacionada con la verificación de las propiedades aritméticas de las secuencias directamente sobre la representación gráfica. Por lo que la gráfica, es usada como entorno de experimentación y validación de lo supuesto sobre las secuencias gráficas. Por ejemplo, en los primeros acercamientos los estudiantes solamente cuentan los elementos de los términos de las secuencias sin relacionarlos.

La visualización de relaciones contextuales, la cual está ligada al grado de generalización contextual, se establece entre las expresiones simbólicas que empiezan a ser generales y los atributos de la representación gráfica. Por ejemplo, el número del lugar que ocupan los elementos y su numerabilidad, se relaciona con la expresión en palabras de la regla que subyace al patrón. El estudiante aun no puede abstraer totalmente la idea general que describe el crecimiento de la secuencia, para hablar de ella necesita de números, esto lo podemos notar cuando el estudiante explica su fórmula.

En la visualización de organizaciones simbólicas, primero se pasa por una interpretación en la que se detectan claramente los elementos que forman las estructuras gráficas, por ejemplo constantes y variables, y se da sentido a diferentes organizaciones de la representación gráfica de la secuencia, conectando de manera adecuada o inadecuada las relaciones generales.

En la *Tabla 1* describimos de manera general cómo nuestros niveles de generalización visual quedan enmarcados dentro de los niveles de generalización descritos por Radford y las formas como los estudiantes analizan las figuras, desde el punto de vista de Duval.

Tabla 1.

El papel de la visualización en la generalización

Operación visual / Grado de generalización	Mereológica	Óptica	Lugar
Factual	Visualización de estructuras numéricas		
Contextual	Visualización de relaciones contextuales		
Simbólica	Visualización de organizaciones simbólicas		

Consideramos que bajo esta perspectiva, trabajos futuros podría dirigirse a analizar éste último tipo de visualización que hemos llamado de organizaciones simbólicas. El modelo de análisis que proponemos debe ser revisado y evaluado en cuanto su pertinencia y generalidad. El marco conceptual debe analizarse profundamente en cuanto a sus fundamentos.

Bibliografía

Bell, C. (2011). Lining up Arithmetic Sequences. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17(1),* 34-39.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra. A Broadening of sources of meaning. A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Lin, F. & Yang, K. (2004) Differentiation on student's reasoning on linear and quadratic geometric number patterns. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 4 (pp 457-464). Berguen, Norway.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics 33,* 203-233.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa, 9(Número especial),*103-129.

Radford, L. (2006b). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. & Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 40(1),* 83-96.

Rinvoold, R. (2011). *Multimodal derivation and proof in algebra.* Recuperado el 20 de octubre del 2012 de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7-WG1-Rinvold-Lorange.pdf

Rivera, F. & Rossi, J. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11(4),* 198-203.

Rivera, F. & Rossi, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 65-82*.

Secretaría de Educación Pública (2010). *Serie: Programas de Estudio. Dirección General de Bachillerato.* México: SEP. Recuperado el 21 de marzo del 2013 de: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_1ersem/MATEMATICAS_I.pdf

Smith, M., Hillen, A. & Catania, C. (2007). Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understanding and Set Classroom Norms. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(1)*, 38-44.

Stylianou, D. (2011). The Process of Abstracting in Students' Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17(1)*, 8-12.