I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual

Maricela Bonilla González
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
mbonillag@cinvestav.mx
Teresa Rojano Ceballos
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
rojanot@gmail.com

Resumen

El estudio tiene como propósito investigar los procesos de transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica para la resolución de ecuaciones lineales, cuando se utiliza un modelo de enseñanza concreto, virtual y dinámico con estudiantes de nivel secundaria. Al final del estudio, los alumnos muestran un avance significativo en la resolución de ecuaciones y se puede decir que en su mayoría logran realizar la transferencia de las acciones efectuadas con el sistema de signos del modelo concreto (balanza virtual) a acciones que se ejecutan con el sistema de signos del álgebra. A su vez, se observó que los procesos de transferencia pasan por diferentes etapas, dependiendo del sistema de signos hacia el cual se logra la transferencia de acciones.

Palabras clave: Sintaxis algebraica, balanza virtual, ecuaciones lineales, affordances, transferencia, aprendizaje situado.

Introducción

Hay pocos indicios de que lo que se aprende en una situación se aplique espontánea o fácilmente a otra distinta, es decir que se dé una transferencia del aprendizaje a otra situación distinta de aquella en la que éste tuvo lugar. Si bien algunos investigadores que han desarrollado la idea de aprendizaje situado (Lave y Wenger, 1991) han cuestionado el uso que se hace de los resultados de estudios de transferencia, lo cierto es que en el terreno de la educación matemática los fenómenos de transferencia (y no transferencia) siguen estando presentes y resultan de interés para la investigación en este campo.

En el trabajo que aquí se presenta interesa estudiar los fenómenos de transferencia de las acciones realizadas en un *modelo concreto virtual* (modelo de la balanza) para la resolución de ecuaciones lineales a acciones en el nivel de la sintaxis del método algebraico de resolución.

Antecedentes.

Cuando los estudiantes se inician en el estudio del álgebra y se enfrentan a trabajar con incógnitas, acceden a otros niveles de pensamiento superando lo numérico y los procedimientos netamente aritméticos. Diversos estudios han documentado los errores de los estudiantes, analizando gramaticalmente las expresiones algebraicas (por ejemplo, Davis, Jockusch & McKnight, 1978; Matz, 1982). Kieran (1992), Matz (1980) y Booth (1984) señalan que es difícil para los estudiantes comprender que los signos de operación cambian su significado al cambiar de un dominio de conocimiento a otro, pues la aritmética y el álgebra comparten muchos de los mismos signos y símbolos, tales como el signo igual, el de adición y el de sustracción, inclusive el uso de letras. Los símbolos + y -, que en la aritmética funcionan como operaciones ejecutables como en los algoritmos de la adición y la sustracción y que llevan a un resultado numérico, en el campo del álgebra relacionan términos que contienen literales y son operaciones suspendidas.

Filloy y Rojano (1989) han reportado que ocurre una *ruptura didáctica* entre la resolución de ecuaciones del tipo $ax+b=c$, las cuales puede resolverse por métodos aritméticos, y la resolución de ecuaciones del tipo $ax+b=cx+d$ que necesitan métodos algebraicos formales. De acuerdo con estos autores, el tránsito del primer tipo de ecuaciones al segundo no es inmediato, es necesario construir o adquirir elementos de la sintaxis algebraica, y la construcción de estos elementos sintácticos está basada en un conocimiento aritmético pero a su vez, requiere de una ruptura con la aritmética. En este tránsito, las concepciones de estudiantes de operar con los números deben cambiar por el concepto de operar con objetos algebraicos. Aunque algunas investigaciones (Bolea, Bosch y Gascón, 1998; Bolea, 2002) muestran el sentido en que la institución escolar interpreta generalmente el álgebra elemental, como una aritmética generalizada, y las consecuencias sobre tales interpretaciones.

En resumen, estas investigaciones advierten sobre las dificultades que los estudiantes enfrentan en su tránsito al pensamiento algebraico y plantean la necesidad de estudiar a fondo la naturaleza de lo didáctico, cognoscitivo y epistemológico en relación a tales dificultades.

El uso de modelos concretos como uno de los acercamientos para enseñar a los alumnos cómo resolver ecuaciones lineales es a menudo objeto de debate en la literatura científica. De acuerdo con J. Vlassis (2002), durante varios años, una serie de autores (Herscovics y Kieran, 1980; Filloy y Rojano, 1989; Linchevski y Herscovics, 1996) han experimentado con diversas situaciones y modelos concretos con los que los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones. Vlassis basa sus reflexiones sobre los resultados de un estudio empírico; en sus investigaciones hace referencia al uso de modelos concretos para la enseñanza de las ecuaciones lineales. Sus observaciones muestran que el modelo de la balanza puede ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de métodos formales en la resolución de ecuaciones, con la incógnita en ambos lados de la ecuación. Para Vlassis, el modelo de la balanza es una herramienta efectiva en la transmisión de los principios de transformación, además hay un interés esencial en darle significado concreto a esas manipulaciones y proporcionar operaciones mentales imaginarias, aunque manifiesta que la presencia de números negativos en la resolución de ecuaciones lineales por parte de los estudiantes da lugar a muchos errores.

Filloy y Rojano (1984), Vergnaud y Cortés (1986) argumentaron que la presentación de situaciones-problema usando la balanza de dos platillos es extremadamente útil para la introducción del álgebra, aunque en el estudio de Filloy y Rojano (1984 y 1989) identificaron tendencias extremas en relación a la modelación concreta, consistentes, por un lado, en un arraigo al modelo aún en situaciones en las que éste no se podía aplicar, y por otro, un desprendimiento casi inmediato del modelo para trabajar en el nivel sintáctico "puro". Rojano y Martínez (2009) han investigado sobre el uso del modelo de la balanza (en una versión virtual y dinámica) para la resolución de ecuaciones lineales, la cual favorece en los estudiantes la abstracción.

En esta investigación se utiliza un *modelo de enseñanza* basado en la misma balanza virtual utilizada por Rojano y Martínez (2009) y que está constituido por la unidad interactiva "resolución de ecuaciones lineales", dicha unidad está conformada por applets presentes en una secuencia de escenas y que llevan a cabo una función muy específica. La idea es estudiar los procesos de transferencia (y no transferencia) que experimentan los alumnos al pasar de trabajar con la balanza virtual a resolver las ecuaciones con las reglas de la sintaxis algebraica.

Transferencia situada.

La noción clásica de la transferencia del conocimiento (Greeno, Smith y Moore, 1993), se reduce a explorar si los estudiantes que han aprendido un cierto conocimiento en un contexto determinado pueden utilizarlo para enfrentar y resolver otras situaciones que muestran diferencias notables con las estudiadas inicialmente. Varios modelos alternativos de transferencia han surgido en respuesta a las críticas de la transferencia clásica (véase Bransford & Schwarz, 1999; Greeno, Smith, & Moore, 1993; y Lobato, 2003). Greeno, Smith y Moore (1993) presentan una visión alternativa de la transferencia, denominada transferencia del aprendizaje situado, en donde interesa discutir las características del contexto donde se efectuó el estudio de determinada situación y cuál fue el papel de la interacción social en dicho estudio.

Algunos investigadores (Greeno, 1997, 1998, Greeno, Smith y Moore, 1993) han puesto de relieve la importancia fundamental de las *affordances*[1] (cualidades de los objetos, o entornos, que permiten a un individuo realizar una acción) y sugieren que la transferencia depende de una capacidad de percibir las *affordances* para la práctica que están presentes en una nueva situación. En el estudio que aquí nos ocupa las *affordances* que surgen del diseño de la balanza virtual permiten realizar actividades con dicho artefacto, visto de otra forma las propiedades del artefacto invitan a los estudiantes a su interacción. La *affordance* es entonces el uso potencial de la balanza en relación con el entorno, en donde hay una disposición tanto del agente, del objeto, como del entorno para generar una construcción, capaz de otorgar inmediato reconocimiento, sentido y funcionalidad. La investigación que aquí se presenta, se propone observar y analizar cómo las *affordances* que están presentes en el Modelo de la Balanza son reconocidas y transferidas por los sujetos a la sintaxis algebraica.

Las *affordances* presentes en el diseño de la balanza virtual son:

[1]Aquí usaremos el término en inglés, con esta connotación.

Pesar en la balanza virtual, es decir, colocar pesas en los platillos a través de la manipulación directa, de tal forma que ambos platillos tengan el mismo peso. El alumno obtiene el efecto de estas acciones de manera visual cuando ambos platillos queden equilibrados. Cabe señalar que con la balanza diagramática no hay posibilidad de pesar.

Representar ecuaciones en la balanza virtual permite comprender la noción de equilibrio que es equivalente a la igualdad algebraica en la ecuación sintáctica, mientras que en la balanza diagramática, aunque hay posibilidad de representar ecuaciones, no se percibe visualmente el equilibrio.

Resolver ecuaciones de manera concreta: el estudiante al realizar cada acción obtiene un efecto visual en la balanza virtual y en la ecuación simbólica que se encuentra en la base de la balanza, lo anterior retroalimenta al estudiante en las acciones posteriores. La preservación de la igualdad en cada paso de la transformación de la ecuación se corresponde con el restablecimiento del equilibrio, sin embargo, en la balanza diagramática el estudiante debe anticipar lo que va a suceder con cada acción.

*Manipulación de objetos: e*l estudiante realiza una manipulación virtual de los objetos (bloques de x y de una unidad de peso) realizando acciones que producen determinados efectos y con ello, dan significado a dichas manipulaciones cuando resuelven ecuaciones de manera sintáctica.

*Metáfora del equilibrio: e*l establecimiento de una situación de equilibrio entre los dos platillos permite a los estudiantes dar sentido a las propiedades de la igualdad en la solución de ecuaciones lineales y así llegar a la equivalencia equilibrio-igualdad.

Descripción del modelo de enseñanza.

Se trabaja con la Unidad Interactiva "resolución de ecuaciones lineales" la cual contiene un modelo de balanza virtual y dinámica, se utiliza como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones (Rojano y Martínez, 2009). Esta unidad interactiva está dividida en dos apartados: Balanza I (balanza simple, figura 1) y Balanza II (balanza con poleas, figura 2), el primer apartado aborda la resolución de ecuaciones lineales del tipo ax+b=c, y ax + b = cx + d, con a, b, c y d enteros positivos y el segundo apartado con a, b, c y d enteros positivos o negativos.

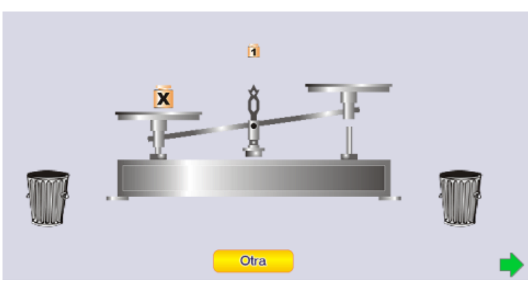

Figura 1. Balanza simple

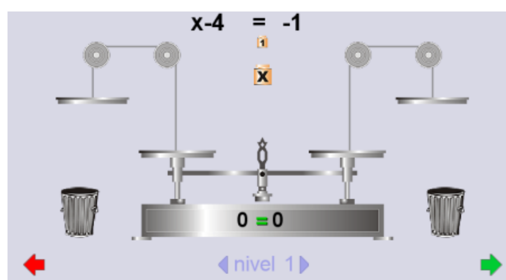

Figura 2. Balanza con poleas

Método.

Se realiza un estudio de corte cualitativo, con intervención en la fase de enseñanza. La población es un grupo de estudiantes que cursan el segundo grado de educación secundaria. Se trabaja con estudiantes que no han recibido instrucción en la resolución de ecuaciones lineales del tipo ax+b=c y ax+b = cx+d, pero sí del tipo + 4 = 9.

Marco de análisis.

Con el propósito de analizar y discutir los datos recabados con cada uno de los sujetos en el estudio piloto, se utiliza un marco de análisis el cual nos permita identificar estratos de transferencia en la resolución de ecuaciones lineales. Los procesos de transferencia se van manifestando en distintos niveles de abstracción y por lo tanto a través de distintos estratos de sistemas de signos que utilizan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, a partir de la experiencia con la unidad didáctica de la balanza virtual; no vamos a hablar de si hay o no transferencia, sino de una transferencia estratificada.

Estratos de transferencia (se refieren al sistema de signos al que se realiza la transferencia):

Estrato de transferencia del Sistema de Signos de la Aritmética (SSAr)

Los estudiantes que realizan transferencia en este estrato resuelven la ecuación utilizando el sistema de signos de la aritmética; recurren a las *affordances* de este estrato que son operatividad numérica y una noción de igualdad, en donde suelen hacer uso de hechos numéricos y técnicas de conteo. Booth (1983) ha señalado el uso de ambos entre estudiantes que se inician en el álgebra.

Estrato de transferencia de la Balanza Virtual (SSBV)

Los estudiantes que realizan transferencia en el modelo de la balanza virtual requieren de la unidad didáctica para resolver ecuaciones, es decir, recurren a las *affordances* de este estrato que son manipulación de objetos y la metáfora del equilibrio.

*Estrato de transferencia de la Balanza Diagramática (*SSBD)

Los estudiantes que realizan transferencia en este estrato requieren del modelo diagramático para resolver una ecuación, es decir, recurren a las *affordances* de este estrato que son metáfora del equilibrio y manipulación mental de objetos, pues para encontrar el valor de la incógnita requieren dibujar la balanza y los bloques, o bien sólo los bloques.

Estrato de transferencia del Sistema de Signos del Álgebra (SSAl)

Los estudiantes que realizan transferencia en este estrato para resolver una ecuación utilizan métodos formales de resolución de ecuaciones que incluyen la transposición de términos y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación, es decir, recurren a las *affordances* de este estrato que son métodos sintácticos de resolución de ecuaciones y la noción de igualdad algebraica restringida.

Los estratos anteriores surgen a partir del análisis de los casos y están íntimamente ligados con el tipo de *affordances* que recupera el sujeto al cambiar de un sistema de signos a otro. En el reporte del estudio se observa que hay estudiantes que transitan por cada uno de los estratos hasta ser usuarios competentes del sistema de signos del álgebra, pero la evolución de la transferencia en los sistemas de signos no es lineal, ni jerárquicamente ordenada, se da por ciclos, pues un estudiante puede haber evolucionado con un cierto tipo de ecuaciones, pero cuando se le plantea una modalidad de ecuación distinta requiere nuevamente del modelo virtual, del diagramático o bien del sistema de signos de la aritmética para apoyarse y poder resolver la ecuación. A continuación se describe el desarrollo del estudio.

Trabajo experimental con la balanza virtual.

Al inicio del estudio se aplicó a un grupo de ocho estudiantes un cuestionario inicial, con el fin de identificar en ellos las características individuales de pensamiento aritmético y pre-algebraico, así como las estrategias utilizadas en la resolución de ecuaciones lineales.

El trabajo experimental se realizó utilizando la unidad interactiva de resolución de ecuaciones lineales. En situación de entrevista con instrucción se enseñó al alumno la resolución de ecuaciones lineales, a través de dos apartados: Balanza I (balanza simple, figura 3) y Balanza II (balanza con poleas, figura 4). El primer apartado está compuesto de cuatro fases: encontrar el peso desconocido (en donde el alumno debía simplemente encontrar cuánto pesa x poniendo bloques de peso 1 del lado derecho de la balanza hasta que ésta se equilibre), representar ecuaciones (del tipo ax+b=cx+d con a,b,c y d enteros positivos en la balanza), encontrar el valor de x (manipulando los bloques de la balanza) y resolver ecuaciones con la balanza fija (aquí el alumno transitó de la manipulación concreta a la sintaxis algebraica).

En el segundo apartado (Balanza II, figura 4), la cual contiene tres fases, los alumnos aprendieron a representar una ecuación del tipo $ax \pm b=cx \pm d$, posteriormente pudieron encontrar el valor de x (aquí las operaciones válidas son quitar pesas de los platos y poner pesas ya sea tomándolas de las pilas disponibles al centro, o bien pasando pesas de un plato a otro, transponer) y resolver ecuaciones con la balanza fija en donde transitaron hacia la operatividad algebraica dejando atrás el modelo de la balanza.

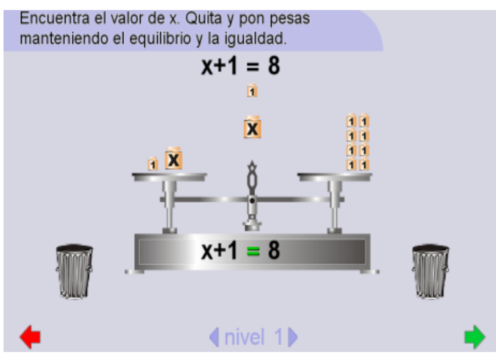

Figura 3. Balanza simple

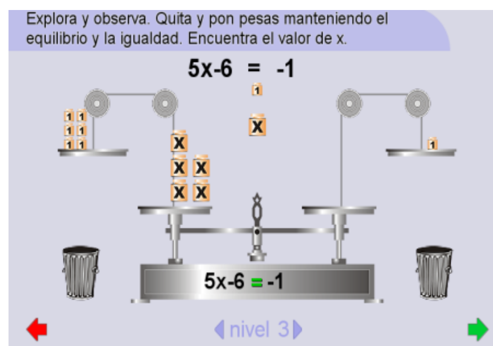

Figura 4. Balanza con poleas

Aplicación de los cuestionarios.

Con el objeto de indagar los procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales con el apoyo de la unidad interactiva, se aplicaron cuestionarios en cuatro momentos, uno cuando los estudiantes transitaron de la manipulación concreta a la sintaxis algebraica (Cuestionario I, balanza simple), dentro del modelo virtual, y posteriormente cuando resolvieron ecuaciones con el apoyo de la balanza fija y así poder observar la transferencia a papel y lápiz (Cuestionario II, balanza simple). De la misma forma se hizo en la balanza con poleas (Cuestionario III y Cuestionario IV).

Discusión final y resultados.

Al finalizar el estudio, todos los estudiantes entrevistados mostraron un avance significativo en la resolución de ecuaciones y se puede decir que lograron transferir las acciones del estrato del SSBV al estrato del SSAl, pues ya no se apoyan en el modelo diagramático ni en el virtual para encontrar el valor de la x; utilizan métodos formales para resolver los ítems, como la transposición de términos y el quitar los mismos términos en ambos lados de la ecuación. A continuación, se muestra el caso de Jazmín, con el que se ilustran distintas etapas de la transferencia al SSA*l*.

En el diagnóstico, Jazmín resuelve correctamente la mayoría de las ecuaciones aritméticas; en sus resoluciones utiliza métodos intuitivos que incluyen el uso de hechos numéricos y técnicas de conteo. Con respecto a la resolución de ecuaciones algebraicas que poseen la ocurrencia de la incógnita en ambos lados de la igualdad no resuelve ningún ítem.

Después de haber resuelto ecuaciones mediante el apoyo de la balanza virtual (simple), la alumna realiza la transferencia al estrato del SSBD en la mayoría de sus resoluciones. Como podemos observar, en la figura 5, para encontrar el valor de x Jazmín dibuja los bloques, es decir, las *affordances* presentes en el modelo no las transfirió a la sintaxis algebraica, sino al SSBD.

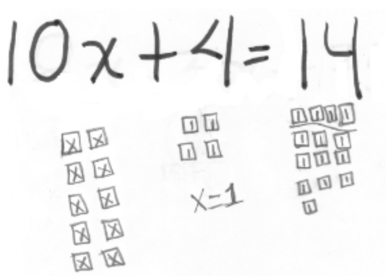

Figura 5. Resolución de Jazmín. Cuestionario I

Posteriormente y después de encontrar la solución de ecuaciones con el apoyo de la balanza fija, la alumna no requiere del modelo virtual ni del diagramático, es capaz de realizar la transferencia al estrato del SSA*l*, aunque la utilización de la simbología algebraica es aún restringida. En la siguiente figura se muestra la resolución de Jazmín, en donde después de simplificar la ecuación inicial obtiene la ecuación 9x=99, sin pasar por ecuaciones intermedias y a diferencia su resolución anterior utiliza el SSA*l*.

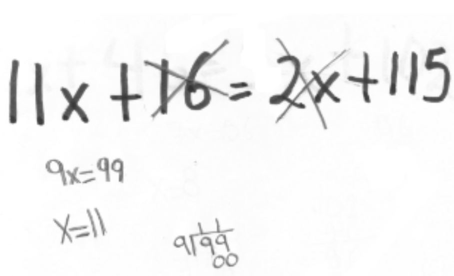

Figura 6. Resolución de Jazmín. Cuestionario II

Además la alumna también es capaz de realizar la transferencia a ecuaciones distintas a las contenidas en la unidad interactiva, ecuaciones que pueden llevar a lecturas polisémicas (lecturas espontáneas en las que los estudiantes de álgebra inicial tienden a involucrarse con las ecuaciones). En la figura 7 se puede observar que Jazmín para resolver la ecuación quita de ambos lados de la ecuación los términos iguales y obtiene el valor de x, es decir, la *affordance* que percibió de quitar los mismos objetos en la balanza virtual la transfirió al SSAℓ.

$$x + \cancel{x^3} = \cancel{x^3} + 125$$

$$x = 125$$

Figura 7. Resolución de Jazmín. Cuestionario II

Al finalizar el estudio Jazmín es capaz de realizar la transferencia a ecuaciones distintas a las contenidas en la unidad interactiva, ecuaciones que para su resolución requieren de la simplificación de términos semejantes. En la figura 8 se puede observar que Jazmín no posee dificultades para encontrar el valor de x; quita de ambos lados los términos iguales (2x) y obtiene una ecuación más simplificada, es decir, la *affordance* que percibió de quitar los mismos objetos en la balanza virtual la transfirió al SSAℓ.

$$3x + \cancel{2x} + 19 = \cancel{2x} + x + 37$$

$$3x + 19 = x + 37$$

$$2x + 19 = 37$$

$$2x = 18$$

$$x = 9 \qquad \begin{array}{r} 37 \\ -19 \\ \hline 18 \end{array}$$

Figura 8. Resolución de Jazmín. Cuestionario IV

Por último, los ocho estudiantes entrevistados mostraron signos de transferencia, aunque de manera diferenciada, en el sentido de que dos de ellos logran una transferencia cabal al SSAℓ de manera espontánea, es decir, no requieren del modelo virtual ni del diagramático en sus resoluciones en ninguno de los cuestionarios, pero el resto (seis estudiantes), primero logran transferir las acciones al SSBD y después de haber resuelto ecuaciones con el apoyo de la balanza fija transfieren dichas acciones al SSAℓ. El caso de Jazmín es un ejemplo de la segunda situación, y sólo en el primer cuestionario utiliza el modelo diagramático en sus resoluciones. Cinco alumnos tuvieron una evolución similar, aunque se desprendieron del modelo diagramático de manera diferenciada, en el caso de otro alumno (Oscar) en la mayoría de los ítems del tercer cuestionario no requiere de dibujar la balanza pero sitúa los términos de acuerdo a su posición en la balanza, es decir, evoca el modelo virtual.

Lo anterior nos llevó a replantear el tema de la transferencia situada como transferencia por estratos, en referencia al sistema de signos al que se transfieren las acciones aprendidas en el modelo concreto. Dichos sistemas son estratificados, pues el del modelo virtual es de naturaleza más concreta que el sistema de SSAr y éste a su vez, es menos abstracto que el SSAℓ.

Referencias

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998).*"The role of algebraization in the study of a mathematical organization"* Actas del CERME-1, Osnabrueck, Germany.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Dto. Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Booth, L.R. (1983). A diagnostic teaching programme in elementary algebra: Results and implications, en Hershkowitz, (eds.), pp. 307-3 12.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Chilcdren´s strategies and errores. A report of the strategies and errores in Secondary Mathematics Proyect*. Winsor, England: NFER-Nelson.

Bransford, J. & Schwartz, D. (1999). Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. In A. Iran-Nejad & P. D. Pearson (Eds.), *Review of Research in Education*, 24, 61-101. Washington DC: American Educational Research Association.

Davis, R., Jockusch, E. & McKnight, C. (1978). Cognitive processes involved in learning algebra. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 2(1), 10–320.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Greeno, J. G. (1997). Response: On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, 26(1), 5-17.

Greeno, J.G. (1998). "The situativity of knowing, learning, and research". *American Psychologist*,*53* (1), 5–26.

Greeno, J. G., Moore, J. & Smith, D. (1993). The Institute for Research on earning. Transfer of situated learning. In D. K. Detterman& R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition and instruction*, (pp. 99-167). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73, 572-580.

Kieran, C. (1992). "The Learning and Teaching of School Algebra", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Nueva York, MacMillan.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65.

Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and viceversa. *Educational Researcher*, 32(1), 17-20.

Rojano, T. & Martínez, M. (2009). From Concrete Modeling to Algebraic Syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance. In S. L. Swars, D. W Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 235-243). Atlanta, GA: Georgia State University.

Matz, M. (1980). "Towards a Computational Theory of Algebraic Competence", *Journal of Mathematical Behaviour*, *3*(1), 93-166.

Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. e Brown, J.S. (eds.), Intelligent Tutoring Systems, London: Academic Press.

Vergnaud, G. & Cortes, A. (1986)."Introducing algebra to low level 8th and 9th graders", en Proceedings of the 10th International Conference of Psychology of Mathematics Educational, Londres, pp. 319-324.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or supportfor the solving of linear responses to timed mathematics test. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.