I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Caminhos e percursos da Geometria Analítica: estudo histórico e epistemológico

Adriana Tiago Castro dos **Santos**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - SP
Brasil
Adriana_larissa.le@hotmail.com

Resumo

A Geometria Analítica é parte integrante dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica. Além disso, os conceitos trabalhados na Educação Básica são aprofundados nos componentes curriculares dos cursos de graduação das ciências exatas tais como Engenharia, Ciências da Computação, Arquitetura, Matemática, Física, etc. Seu estudo é relevante, pois é uma ferramenta importante para o Cálculo Diferencial e Integral e é uma das principais referências em um primeiro curso de Álgebra Linear. Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo histórico e epistemológico das primeiras contribuições da Geometria. É importante que o professor discuta os acontecimentos históricos ao trabalhar com os conteúdos da Geometria Analítica, propor aos alunos os problemas matemáticos que originaram os conceitos da Geometria Analítica e possibilite ao aluno a construção do conhecimento e não apenas para a resolução de algoritmos.

Palavras chave: educação matemática, geometria analítica, epistemologia da geometria analítica, ensino da geometria analítica, história da matemática.

Introdução

A Geometria Analítica é parte integrante dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica. Além disso, os conceitos trabalhados na Educação Básica e aprofundados nos componentes curriculares dos cursos de graduação das ciências exatas tais como Engenharia, Ciências da Computação, Arquitetura, Matemática, Física, etc. Seu estudo é relevante, pois é uma ferramenta importante para o Cálculo Diferencial e Integral e é uma das principais referências em um primeiro curso de Álgebra Linear.

No entanto, a aprendizagem de Geometria Analítica no Brasil, têm apresentado dificuldades conforme relatório citado nos trabalhos de Celestino (2000) e Di Pinto (2000), tal relatório foi feito pela *Comissão do projeto das "Disciplinas problema" da Pró-Reitoria de graduação da UNICAMP* de 1997, em que a Geometria Analítica é citada como uma das disciplinas com mais de 35% de reprovação na UNICAMP e na USP.

Di Pinto (2000) forneceu um panorama do estado das produções acadêmicas sobre o ensino de Geometria Analítica no Brasil da década de 90. Esse autor analisou as treze produções científicas brasileiras encontradas (dissertações, teses e artigos) que tratavam do ensino e da aprendizagem de Geometria Analítica.

O autor concluiu que a principal preocupação presente dessas pesquisas era com a ideia da falta de significado dado pelos estudantes aos objetos matemáticos estudados, pois as pesquisas apontavam a ênfase dada pelo ensino de Geometria Analítica em manipulação de algoritmos.

Por sua vez, Fiorentini *et al* (2002) realizaram um levantamento e análise das pesquisas brasileiras sobre a formação de professores que ensinam Matemática, do período de 1978 a 2002. Encontraram 112 trabalhos acadêmicos (teses e dissertações). Dentre suas conclusões, os autores indicam a ausência de estudos histórico-filosóficos e epistemológicos do saber matemático e a predominância do ensino técnico formal das disciplinas específicas.

Com o intuito de contribuir com o ensino da Matemática, educadores matemáticos, apontam possíveis relações entre a história, epistemologia e ensino da aprendizagem da matemática. Alguns estudos propõem novas contribuições em relação da história da matemática já vem sendo realizadas há algum tempo (Mendes, 2006, 2009; Miguel, 1997; Miguel & Brito, 1996; Miguel & Miorim, 2005; Miorim & Vilela, 2009).

No entanto é necessário saber que a história não resolverá todos os problemas do ensino e aprendizagem da matemática. Os estudos de Furinghetti (2007) sugerem que a história da matemática seja uma mediadora da matemática, não é método de ensino, mas uma provedora de recursos que conduz à reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático. Saito e Dias (2013) propõe um diálogo entre historiadores e educadores da matemática de modo que permita uma reflexão sobre a possibilidade da construção de uma interface que contemple a significação dos objetos matemáticos historicamente constituídos, promovendo a apropriação da significação dos objetos matemáticos.

Saito e Dias (2013) salientam que a articulação entre a história e ensino, não é uma tarefa simples, pois não visa apenas uma compreensão mais contextualizada dos objetos matemáticos, mas também uma metodologia de abordagem que viabilize uma proposta didático-pedagógica. Concordo com os autores que defendem a ideia de que não existe uma única história da matemática e é necessário apresentar uma história que contempla a abordagem de cultura matemática.

Os autores argumentam que a contextualização histórica não implica apenas na descrição dos conteúdos matemáticos, mas também, relacioná-los à própria natureza da matemática no passado. Por meio da análise histórica dos conceitos e das problemáticas que conduziram ao surgimento de um conteúdo matemático num determinado momento histórico, é possível compreender como o conhecimento matemático se desenvolveu e se institucionalizou em diferentes épocas. (Bromberg & Saito, 2010).

Neste sentido proponho neste artigo, apresentar um estudo histórico e epistemológico das primeiras contribuições para o surgimento da Geometria Analítica.

As primeiras contribuições

A matemática originalmente foi a ciência dos números e das grandezas e inicialmente era limitada pelos números naturais, porém as primeiras grandes civilizações conheciam algumas frações. Nos primeiros estágios da humanidade houve a preocupação de como surgiu a geometria analítica.

.O início da associação da relação numérica com a configuração espacial são pré históricas, como é também a primeira conexão entre números e tempo. Os antigos documentos escritos da Mesopotâmia, Egito, China e Índia dão evidência da preocupação com a mensuração. Os Papiros pré-helênicos e as e escritas cuneiformes trazem problemas que envolvem os conceitos de comprimento, área e volume.

Historicamente as ideias da Geometria Analítica surgiram da comparação de grandezas curvilíneas com grandezas retilíneas. Os egípcios e os babilônios deram os primeiros passos na geometria por meio do estudo do círculo.

Os babilônios adotaram uma aproximação três para π (embora um exemplo seja conhecido no qual o valor é tomado em 3+1/8), mas sua geometria do círculo, no entanto, ultrapassa os egípcios. Eles reconhecem que o ângulo inscrito em um semicírculo é reto, antecipando Thales por bem mais de mil anos. Além disso, eles estavam familiarizados ao mesmo tempo com teorema de Pitágoras.

Os babilônios nunca chegaram a esse ponto de vista, pois tais elementos essenciais da geometria analítica como coordenadas e equações de curvas surgiram muito mais tarde, mas é bom ter em mente que muitos aspectos da matemática antiga aproximam das concepções modernas. Sistemas primitivos de coordenadas foram usados por agrimensores, antes de 1400 a.C. e, provavelmente, também por astrônomos da Mesopotâmia, mas não há nenhuma evidência de que egípcios ou babilônicos geômetras desenvolveram um sistema de coordenada geométrica formal.

A origem da ideia de coordenadas não foi a única dificuldade para o desenvolvimento da geometria analítica. Deficiências na aritmética, sistemas de numeração usados nos vales do Nilo e da Mesopotâmia não foram tão bem adaptado para cálculo como é o nosso.

Admitindo-se que estes sistemas de numeração eram imperfeitos tais sistemas prejudicou o desenvolvimento da Álgebra. Pode-se citar como exemplo, que os babilônios calculavam a diagonal de um quadrado utilizando meia dúzia de casas decimais. No entanto as deficiências foram provavelmente mais em conceitos do que em número de símbolos numéricos.

"A Álgebra exige um maior grau de abstração do que a geometria e este elemento parece ter sido deficiente na matemática pré-helênica. Os números se referiam essencialmente a números inteiros, e faltava a ideia de frações nos escritos egípcios. Muito tempo foi gasto para encontrar maneiras de evitar frações unitárias, de modo que a proporção de 2 a 43 seria escrita como 1/24 + 1/258 + 1/1032 ou como 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301. O tempo que os babilônios alcançaram o conceito de número racional é uma questão em aberta por causa de equívocos na interpretação de tabelas cuja utilização foi muito enfatizada" (Boyer, 1956, p. 2).

O autor salienta sobre a dificuldade de determinar até que ponto esse trabalho determinou o desenvolvimento na Grécia, onde os próximos passos em direção à geometria analítica foram tomadas de forma e espírito diferente.

Thales e Pitágoras são em grande parte os responsáveis pelo "clima intelectual" na Grécia durante o século VI a.C., a partir do qual a matemática propriamente dita surgiu, mas suas contribuições estava mais em seu ponto de vista abstrato e em seu arranjo dedutivo de material do que em qualquer novidade da matéria As obras desses homens não sobreviveram, mas foram considerados os primeiros matemáticos a ser fundadores da geometria demonstrativa.

Thales contribuiu especialmente para a geometria. Boyer afirma que ele parece ter acrescentado pouco a aritmética ou à associação pré-helênica da álgebra e geometria, mas Pitágoras e seus discípulos foram muito mais longe nessa direção. Relacionavam o tempo e o espaço como número. O *slogan* "tudo é número" serviu de muita inspiração para a matemática, geometria analítica e numerologia. Como parte deste programa, os pitagóricos continuaram os problemas pré-helênicos de comprimento, área e volume, confiantes de que o número poderia ser sempre associada a magnitude geométrica. Fizeram implícita a hipótese plausível em trabalhos anteriores, que as relações de segmentos de retas (e similarmente para áreas e volumes) são explícitas por razões de números inteiros, e, portanto, no conceito de razão e proporção tornou-se base para toda matemática grega.

A falta do conceito de fração no pensamento antigo desempenhou um importante papel na ciência e na matemática, tal pensamento durou mais de dois mil anos, com a ideia de proporcionalidade, em vez da noção mais geral de função.

Nos dias de Thales e dos primeiros Pitagóricos, o "reino do número" incluiu apenas os números inteiros positivos, as únicas curvas reconhecidas na geometria eram a linha reta e o círculo. Se esta situação continuasse, talvez não houvesse a necessidade para o desenvolvimento da Geometria Analítica ou do Cálculo. No entanto, na metade século V a.C. ocorreu uma crise que abalou os fundamentos da filosofia em meios pitagóricos e sua associação com o número.

Esta crise intelectual abriu o caminho para a análise elementar estritamente concentrada no tempo, mas amplamente situada no pensamento do mundo Mediterrâneo; Zeno de Elean (nascido ca. 496 a.C.), Hippasus de Metapontum (fl. 445 a.C.), Demócrito de Abedera (ca. 460-357 a.C.), Hipócrates de Chios (nascido ca. 460 a.C,), e Hípias de Elis (nascido ca. 460 a.C.).

Boyer (1956) afirma que é interessante notar que, em cada caso, as contribuições desses homens não foram o resultado de problemas na ciência natural ou tecnologia, e sim motivados questões puramente filosófica. Ao contrário de uma crença amplamente difundida, os desenvolvimentos importantes na matemática não aconteceram necessariamente com a relação do trabalho e do mundo ou para as necessidades materiais do homem.

A busca grega para as essências levou os pitagóricos a imagem do universo como uma infinidade de pontos matemáticos completamente sujeitos às leis de número - uma espécie de geometria aritmética, mas não é de todo uma geometria analítica. Mas o espaço e o tempo têm uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como "continuidade". O ponto era uma unidade geométrica. Aristóteles definia um ponto pitagórico como uma "unidade tendo posição" ou "unidade considerada no espaço". Tal visão foi contra ao que Zeno propôs como paradoxos.

"Zeno propôs quatro paradoxos em movimento, dos quais os dois primeiros - a Dicotomia e o Aquiles – argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdividir o espaço e tempo, e os dois últimos - a Flecha a e o Estádio – refutam que um objeto em voo sempre ocupa espaço igual a si mesmo; mas aquilo que sempre ocupa lugar no espaço iguala si mesmo não está em movimento. Logo a flecha que voa está sempre parada, portanto o movimento é ilusão" (Boyer, 1996, p. 52).

Os paradoxos, como se vê agora, envolvem noções como sequência infinita, limite e continuidade, os conceitos para os quais nem Zeno nem qualquer dos antigos deu uma definição precisa. Eles representavam uma confusão de sentido e razão, e, portanto, naquela época não eram responsáveis, mas sua influência foi profunda. Considerando que os pitagóricos tinham imaginado uma união da aritmética e geometria, os gregos matemáticos após Zeno viram apenas a incompatibilidade mútua dos dois campos.

O trabalho de Hipasus foi talvez ainda mais obstrutivo para o desenvolvimento de métodos analíticos do que a de Zeno. Os pitagóricos tinham continuado o estudo do comprimento, área e volume, confiante de que o número pode sempre ser associado à grandeza geométrica, mas não muito tempo depois de 450 a.C. Hipasus (ou possibilidade de outra pessoa) criticou esta doutrina com a descoberta de que existem casos simples de segmentos de reta que são mutuamente incomensuráveis.

A relação da diagonal de um quadrado, por exemplo, não pode ser expressa em termos de números inteiros. Tal como isso foi obtido de acordo reconhecimento da ausência de terminação de equivalente geométrica do processo de encontrar o máximo divisor comum, ou pode ter origem no método dado por Aristóteles a demonstração de que a existência de tal relação leva à contradição que um inteiro pode ser de uma só vez tanto pares e ímpares.

A descoberta das grandezas incomensuráveis causou uma forte impressão no pensamento grego é indicada pela história que Hipasus sofreu a morte por naufrágio como uma penalidade para a sua divulgação. Demonstra-se mais confiável pela proeminência dar à teoria de irracionais por Platão e sua escola. A crise da filosofia pitagórica causada pela incomensurabilidade poderia ter sido cumpridas pela introdução de processos infinitos e números irracionais, mas os paradoxos de Zeno bloqueou este caminho.

Ao longo da história dos gregos não havia a análise algébrica. A Geometria era o domínio da grandeza contínua, a aritmética estava preocupada com o conjunto discreto de números inteiros, e os dois campos eram irreconciliáveis. Comprimento, área e volume eram conceitos geométricos indefinidos. A "álgebra" dos gregos era uma geometria de linhas em vez de uma algoritmo de números e problemas clássicos para a construção de linhas, uma espécie de equivalência de teoremas de existência modernas na análise e para eles não haviam fórmulas algébricas independentes. .

Em meados do século V a.C surgiu uma das maiores teorias científicas de todos os tempos: o do atomismo físico.

Demócrito, um dos fundadores da doutrina atômica, também era matemático, e para ele, Arquimedes atribuiu a determinação ou demonstração do volume da pirâmide e do cone. Demócrito compôs numerosas obras que carregam sobre os aspectos críticos dos princípios da geometria, mas praticamente tudo o que ele disse foi perdido.

Por conseguinte, é difícil reconstruir o seu pensamento, mas parece claro que para ele é em grande parte devido a introdução do infinitesimal na geometria. Este atomismo matemático tornou-se, mesmo nos dias gregos, um dispositivo heurístico poderoso, e no século XVII era a força motivadora que levou ao cálculo.

No entanto, a utilização do infinitamente pequeno na antiguidade não poderia ser feita rigorosa porque a noção algébrica de variáveis contínuas não era conhecida.

O método de exaustão, o equivalente cálculo integral grego baseou-se no axioma de Arquimedes, que assume que as grandezas contínuas por bissecções podem ser reduzidas a elementos tão pequenos quanto desejado. O argumento procedeu muito como seria no caso do método moderno de limites, com exceção do ponto de vista geométrico, em vez de numérico.

O círculo e a linha reta possuía fascínio peculiar para os gregos. O sofista Hípias (425 a.C) nascido em Helis inventou a primeira curva que não seja o círculo e a linha reta, introduzindo na geometria da noção de um movimento mecânico. Proclo e outros comentadores lhe atribuem a curva conhecida depois por trissetriz ou quadratriz de Hípias. Essa é traçada assim:

> “No quadrado $ABCD$ (fig. 1) seja o lado AB deslocado para baixo uniformemente a partir de sua posição presente até coincidir com DC, e suponhamos que esse movimento leve exatamente o mesmo tempo que o lado DA leva para girar em sentido horário de sua posição presente até coincidir com DC. Se as posições dos dois segmentos são dadas em um instante fixado qualquer $A'B'$ e DA'', respectivamente, e se P é o ponto de intersecção de $A'B'$ e DA'' o lugar descrito por P durante esses movimentos será a trissetriz de Hípias, a curva APQ na figura. Dada essa curva, faz se a trissecção de um ângulo com facilidade. Por exemplo, se PDC é o ângulo a ser trissectado, simplesmente trissectamos os segmentos $B'C$ e $A'D$, com os pontos R, S, T e U. Se as retas TR e US cortam a trissetriz em V e W, respectivamente as retas VD e WD, pela propriedade da trissetriz dividirão o ângulo PDC em três partes iguais” (Boyer, 1996 p. 47-48).

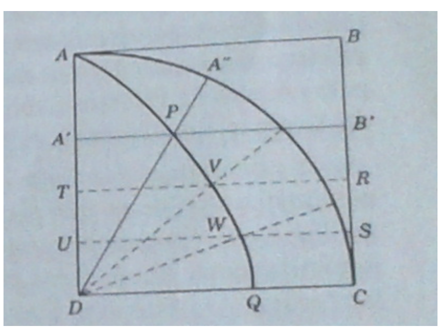

Figura 1 Quadratriz de Hipias
Fonte: Boyer, 1996 p.47

A curva de Hípias chamada de quadratriz e pode ser usada para quadrar o círculo é de importância não só como uma nova curva, mas também como anunciando uma das ideias básicas da geometria analítica - de um lugar geométrico.

Dos três problemas famosos da geometria, a duplicação do cubo foi o que teve o maior papel no desenvolvimento da geometria analítica, e evidentemente foi um que incendiou a imaginação dos antigos gregos. A história diz que o povo de Atenas recorreu ao oráculo de

Delos para aliviá-los de uma praga devastadora. A praga continuou, e quando denúncia foi apresentada com o oráculo, o povo se lembrou de que tinha aumentado o volume do altar oito vezes, ou seja, eles tinham resolvido geometricamente a equação $x^3 = 8$ em vez da equação $x^3 = 2$.. A praga finalmente diminuiu, mas continuaram as tentativas de duplicar o cubo.

Acerca de dois mil anos mais tarde é que se tornou claro que o oráculo sarcasticamente propôs um problema insolúvel conhecido como problema de Delos.

Hipócrates de Chios feito algum progresso em direção à duplicação do cubo em mostrar que, se duas grandezas médias proporcionais x e y pode ser determinada de forma a satisfazer a proporção contínua $a: x = x: y = y: 2a$, então o proporcional x será o do cubo pretendida - isto é, que irá satisfazer a equação $x^3 = 2a^3\cdot$.

Platão exerceu uma forte influência sobre a matemática por seu entusiasmo pelo assunto, mas seus interesses não se encontravam na direção da geometria analítica.

Mas parece que, em geral, Platão condenou o uso de artifícios mecânicos na geometria, alegando que estes tendem a materializar um assunto que ele pertencia ao campo das ideias eternas e incorpóreo. Ele percebeu que a matemática não lida com as coisas dos sentidos, como os valores que são traçados, mas com os ideais que eles se assemelham.

Na medida em que a régua e compasso estão em concreto como artifícios mecânicos, é difícil ver por que Platão sentia um abismo entre a linha reta e circulo por um lado e todas as curvas restantes no outro.

Platão apreciou profundamente os problemas que foram levantados em matemática pelos paradoxos de Zeno e da descoberta do incomensurável, sugeriu um possível método. Ele considerava o contínuo como gerado pela corrente de um infinito sem limites abstratos, e não composto por uma agregação dos indivisíveis.

Tal ponto de vista é algo análogo ao método heurístico utilizado por Leibniz e Newton dos infinitesimais e fluxões, mas é em essência uma petição de principio com a falta de definição de termos.

Dois dos melhores alunos de Platão, Aristóteles (384-322 a.C) e Eudoxus (ca. 408-355 a.C), foram contestados de serem mais inclinados para as ciências naturais. As decisões de Aristóteles sobre o indivisível, o infinito, e o contínuo foram àquelas ditadas pelo bom senso imediato. Ele negou categoricamente a existência de mínimos segmentos de linha indivisíveis e de um infinito real ou concluído.

A essência da continuidade foi encontrada em situações em que são infinitamente divisíveis. Seu estudo do movimento estava preocupado com explanação quantitativa ao invés da descrição quantitativa e assim impediu uma ciência dinâmica. No entanto, foi a continuidade que trouxe aos matemáticos medievais muito perto de geometria analítica.

A contrapartida matemática das vistas filosófica de Aristóteles é vista no trabalho de Eudoxo, a maioria das quais é conhecida apenas indiretamente através de outros pesquisadores.

Pelo método da exaustão de Eudoxus (e talvez Hipócrates antes dele) foi ativado para comparar, através da teoria da razão e proporção, grandezas geométricas curvilíneas e retilíneas.

No entanto, a descoberta da incomensurabilidade mostrou que as relações, mesmo das figuras retilíneas, nem sempre pode ser definida em termos de números inteiros.

> "Eudoxus foi sem dúvida o mais brilhante matemático de seu século. Menaechmus (ca. 360 aC), irmão de Dinostratus e tutor de Alexandre, o Grande para fazer a contribuição mais espetacular do tempo para o desenvolvimento da geometria analítica. Este trabalho parece ter sido inspirado pelos problemas de Delian que Arquitas tinha dado a sua incrível tríade de superfícies. Sua contribuição mais notável foi uma solução tridimensional do problema de Delos, e obteve sua solução sem a ajuda de coordenadas"(Boyer, 1956, p. 17).

Estudou cuidadosamente as secções do cilindro em um plano, e descobriu o uma nova curva com propriedades surpreendentes. A elipse pode, ter entrado para a geometria grega como uma secção de um cilindro, ou de alguma forma não conhecida.

Dentre todas as curvas a elipse era vista em situações rotineiras. Rodas e outros objetos circulares, quando visto obliquamente, aparecem como elipses, e as sombras por círculos geralmente são elípticas.

Demócrito, em sua geometria infinitesimal, foi conhecido por ter estudado as secções circulares de um cone. Será que ele não observava as seções elípticas mais gerais? Não há evidências de que ele o fez. Foi relatado por Proclus e Eutocius que a elipse, hipérbole e a parábola foram descobertas por Menaecmus na metade do século IV a.C, e foi conhecida como "Tríades de Menaecmus".

Menaecmus parece ter sido levado a elas, seguindo o mesmo caminho que Arcytas havia sugerido, ou seja, ele tentou resolver o problema de Delos por secções de sólidos geométricos.

Tomou três cones circulares reto, um ângulo agudo, um retângulo e um obtusângulo, e cortou cada um deles por um plano perpendicular a um elemento. Tal fato revelou pela primeira vez aos geômetras gregos vez uma família de curvas que, ao contrário de linhas, círculos e quadriláteros diferem em forma, bem como em tamanho.

Por meio destas secções cônicas o cubo é facilmente duplicado, ou por meio da intersecção das duas parábolas $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$, ou através da primeira intersecção destas com a hipérbole $xy = 2ax^2$.

Se Menaecmus duplicou o cubo com essas curvas tal como é relatado, ele deve ter sabido o equivalente geométrico da equação da hipérbole equilátera se refere às suas assíntotas como eixos. Zeuthen, Heath, e Coolidge supor que esta equação foi derivada a partir da forma em relação a um vértice $y^2 = 2ax - x^2$ traduzindo-eixos e obter o centro da equação $x^2 - y^2 = a^2$ e eixos de rotação com a metade de um ângulo certo para obter $2xy = a^2$.

A realização provável de Menaecmus é dada acima, em forma analítica e esses procedimentos não fez jus ao seu talento. Ele foi um pioneiro na descoberta da família mais útil e interessante de curvas em todas as ciências e matemática, e o caminho foi feito de modo difícil pela falta de ideias algébricas e simbolismo.

As secções cônicas já são definidas como local num plano - o local de pontos para os quais a distância a um ponto fixo (foco) é a distância a partir de uma linha fixa (diretriz) numa razão fixa (excentricidade).

É uma questão relativamente simples para traduzir esta propriedade que define em linguagem analítica por meio de notações algébricas e técnicas modernas. O Simbolismo trigonométrico e fórmulas agora permitem uma facilidade realizar transformações algébricas sob rotação dos eixos por meio de equações algébricas.

Um extraordinário grau de originalidade seria necessária para Menaecmus conceber o equivalente a tudo isso de forma geométrica, mas a evidência parece indicar que ele fez isso. O que ele escreveu foi quase completamente perdido, e até mesmo os nomes que ele deu às curvas são desconhecidos.

Tem sido sugerido que Menaechmus pode ter sido o primeiro a ter o plano como um lugar geométrico, construído cinematicamente de uma maneira semelhante à que foi adotada por Hipias para a quadratura.

A secção de cones foram mostradas para ter propriedades fundamentais como lugar geométrico do plano e dessas "equações geométricas básicas", inúmeras outras propriedades das curvas no plano foram deduzidos. O descobridor original parece ter sido Menaecmus ".

É uma grande pena que as obras de Menaecmus foram perdidas, de modo que as reconstruções de seu trabalho são em grande parte conjecturas.

Sob as circunstâncias, pode se bem adiar uma análise mais aprofundada dos métodos que ele poderia ter usado até estar em um terreno mais sólido, nas obras publicadas de Apolônio, as porções das Cônicas de Apolônio de abertura, presumivelmente, são representativos do pensamento de Menaecmus.

Por mais dois mil anos depois que Descartes comprometeu-se a trazer à tona as curvas planas superiores, e ao fazê-lo, ele inventou a geometria analítica em sentido muito mais geral do que a de Menaecmus.

O incomensurável havia deixado uma impressão tão profunda no pensamento grego que eles cuidadosamente distinguiram os casos em que as grandezas eram racionais e aquelas em que eram irracionais.

A Geometria Analítica de Descartes apareceu em 1637, no pequeno texto chamado *Geometria*, como um dos três apêndices do Discurso do Método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

Considerações Finais

O objetivo deste artigo foi apresentar as primeiras contribuições para surgimento da Geometria Analítica. Por meio da história constata-se que as ideias que fundamentam a Geometria Analítica surgiram em meios a muitos problemas enfrentados pelo homem, tais como a descoberta dos números irracionais, dos incomensuráveis, os paradoxos de Zeno, o método da exaustão, a ideia de continuidade, questões filosóficas e crenças religiosas.

É importante que o professor discuta os acontecimentos históricos ao trabalhar com os conteúdos da Geometria Analítica, proponha aos alunos os problemas matemáticos que originaram os conceitos da Geometria Analítica e possibilitar ao aluno a construção do conhecimento e não apenas para a resolução de algoritmos.

Referências e Bibliografia

Boyer, B. C. (1956). History of Analytic Geometry its Development from the pyramids to the Heroic Age. Princeton Juntion N.J: Yeshiva University.

Boyer, B.C. (1996). História da matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher.

Bromberg, C.; Saito, F. (2010). A história da matemática e a história da ciência. In; Beltran, M. H. R.;

Saito, F.; Trindade, L. dos S. P. (Org.). *História da ciência: tópicos atuais*. São Paulo: Livraria da Física, (pp. 47-72).

Cajori, F. (2007). *História da matemática*. São Paulo: Ciência Moderna.

Cavalca. P (1997). *Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação*. Dissertação de Mestrado Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo. São Paulo.

Di Pinto, M. A. (2000). *Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica: As pesquisas Brasileiras da década de 90*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Eves, H. *Introdução à história da matemática*.(2004). Campinas: Ed. Unicamp.

Fauvel L, J.; Van Maanem, J.(2000). *History in mathematics education*: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

Fiorentini, D; Nacarato A. M.; Ferreira, A. C. Lopes, C. S.; Freitas, M. T. M; Miskulin, R. G. S.(2002). Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, 36, (pp.137-159). Acesso Maio, 04, 2013 em http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/1098?mode=full

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Berlin, 66, (2), (pp.131-143).

Mendes, I. A. (2006). Matemática e investigação na sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo.

Mendes, I. A.(2009). *Investigação histórica no ensino da matemática.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Miguel, A.(1997). As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Zetekiké, Campinas, 5, (8), (pp.73-105).

Miguel, A.; Brito, A. J. A (1996). História da matemática na formação do professor de matemática. *Cadernos Cedes*, 40, (pp.47-61).

Miguel, A.; Miorim, M. A.(2005). História na educação matemática: propostas e desafios.Belo Horizonte: Autêntica.

Miorim, M. A.; Vilela, D. S. (Org.).(2009). *História, filosofia e educação matemática*. Campinas: Alínea.

Saito, F., Dias, S. M. (2013). Interface entre a história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século. *Ciência & Educação*, 19, 89-111. Acesso Junho, 07, 2013 em http://dx.doi.org/10.1590/S1516-73132013000100007