I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

La objetivación del número racional

José Wilde **Cisneros**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
jose.wilde@gmail.com
Walter Fernando **Castro** Gordillo
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
wfcastro82@gmail.com
Sandra Y. **Cadavid**
Facultad de Educacion, Universidad de Antioquia.
Colombia
sarapaulina22@yahoo.es

Resumen

Esta comunicación da cuenta de la investigación en proceso, donde se pretende analizar la objetivación del número racional desde los procesos de medición que generan la razón. Los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia proponen un enfoque que busca el desarrollo de competencias que permitan a los alumnos afrontar los problemas matemáticos de la vida y del trabajo, empleando los mejores medios posibles, para ello, las instituciones educativas están facultadas para proponer procesos de aprendizaje que armonicen el desarrollo del pensamiento matemático con actividades matemáticas.

Palabras clave: Actividad, Medición, Razón, Objetivación, Número racional.

Introducción

A pesar de la importancia concedida al número racional en el currículo y de los resultados logrados durante muchos años de investigación, aún persisten dificultades tanto en su enseñanza, como en su aprendizaje. Algunas investigaciones (Pontón, 2012; Lamon, 2012) sugieren realizar esfuerzos que permitan brindar a los maestros que enseñan matemáticas, herramientas que los ayuden en su tarea de enseñanza de las fracciones.

La propuesta que se presenta en esta comunicación tiene como objetivo discutir la construcción del número racional a partir de la razón, en situaciones que involucran la medida. Esta investigación se realiza en el ambiente natural escolar, con seis niños en edades entre 11 y 12 años, de grado séptimo, de la Institución Educativa Andrés Bello, municipio de Bello, departamento de Antioquia, Colombia. La metodología es de carácter cualitativo con énfasis en un estudio de casos, el cual se focaliza en la interacción social de los sujetos y en la mediación instrumental. La investigación se fundamenta en los trabajos sobre la teoría de la Actividad de Leontiev (1978), y la teoria de la Objetivacion de Radford (2006, 2011, 2013).

Problema

El aprendizaje escolar referente a la razón, a la proporcionalidad y en general a los números racionales ha presentado dificultades informadas por diversas investigaciones (Petit, Laird & Marsden, 2010; Escolano, 2010; Charalambous & Pantazi, 2007; Gould, Outhred, & Mitchelmore, 2000; Mazzocco & Devlin, 2008).

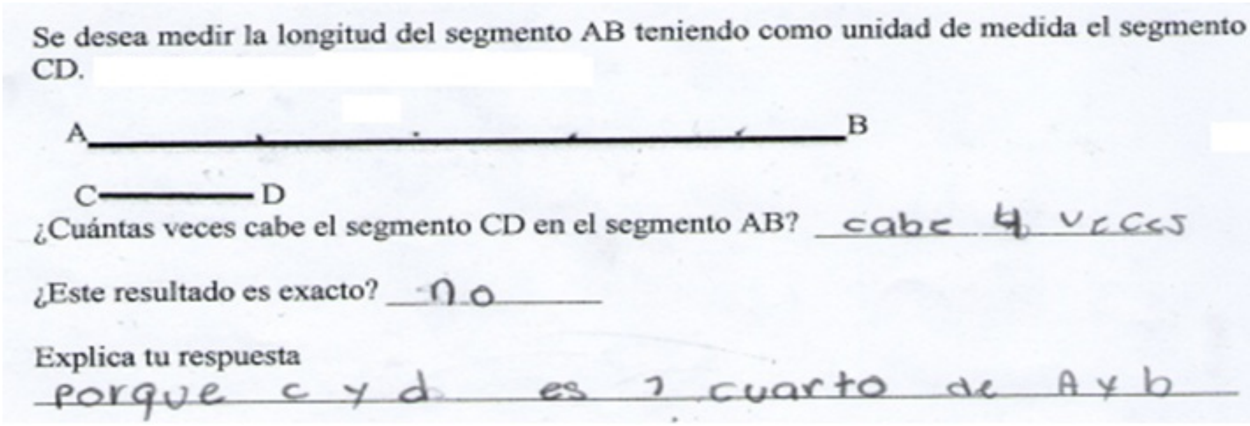
Behr, Harel, Post, & Lesh, (1993) consideran que las fracciones están vinculadas con cinco constructos:

a) *Razón*. Comparación entre dos cantidades de la misma naturaleza o de naturaleza diferente.
b) *Operador*. Transforma el cardinal de un conjunto discreto que puede ser partitivo (en caso de la fracción $\frac{1}{b}$, $b \neq 0$) o partición multiplicativa (en el caso de la fracción $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$)
c) *Cociente*. Un número racional puede verse como una división indicada entre dos números naturales.
d) *Medida*. Una situación que resulta cuando se comparan dos cantidades, una de las cuales se considera como la unidad.
e) *Parte-todo*. Comparación entre la parte de un todo continúo o discreto, es decir, el número racional representa la relación donde el numerador indica el número de partes que componen el todo, el denominador es el número de partes en que se divide la totalidad; este concepto es importante para la comprensión de los demás significados.

Si bien los anteriores constructos consideran diversas situaciones vinculadas con la fracción, no se hace un especial énfasis en situaciones de medida, que suelen ser más cercanas a las experiencias de los estudiantes y vinculadas con su entorno sociocultural.

Algunos autores (Escolano, 2010) abordan las dificultades de comprensión de los escolares, y prestan atención a los procedimientos, relaciones y operaciones de la estructura numérica de los números racionales; otros (Lamon, 2012) informan sobre “saltos conceptuales” percibidos en las tareas propuestas a los niños y que contribuyen a incrementar la dificultad del proceso de aprendizaje. En este trabajo se indaga sobre el uso de la razón en situaciones de medida tomadas del contexto sociocultural de los niños.

La práctica docente en la enseñanza del número racional ha permitido documentar la dificultad de su comprensión por parte de los niños. La Figura 1 ilustra la respuesta de un niño a una tarea que requiere el uso de aspectos conceptuales vinculados con los racionales y con la medida.


Se desea medir la longitud del segmento AB teniendo como unidad de medida el segmento CD.

A B

C D

¿Cuántas veces cabe el segmento CD en el segmento AB? cabe 4 veces

¿Este resultado es exacto? no

Explica tu respuesta

porque c y d es 1 cuarto de A y b

Figura 1. Longitud de segmentos.

Al niño se le dificulta identificar la relación que cuantifica la medida relativa entre las partes y el todo; además, parece reconocer la relación numérica, pero desconoce la fracción como un nuevo constructo que surge en la solución de la tarea.

La enseñanza del número racional generalmente se centra en las fracciones y desde esta perspectiva se desliga de los procesos de medición. Similarmente, las aplicaciones suelen focalisarce en el procedimiento "regla de tres" donde la razón no es el centro de atención. Adicionalmente, (Puerta, 2012) presenta el número Racional de la forma: $Q = \{\frac{x}{y}, x, y \in Z, y \neq 0\}$ y posterior a tal presentación formal propone "aplicaciones" que involucran soluciones de ecuaciones.

Justificación

Desde una postura sociocultural (Vygostky, 1982) se considera deseable vincular la actividad matemática con el entorno social y cultural en el cual viven los niños, en la medida que ofrece a éstos orientaciones de desarrollo y formas de apropiación del saber. Se considera que los procesos de medición pueden ser apropiados para motivar el uso de la razón y por tanto podrían ser un camino de entrada hacia la construcción del concepto de número racional; además, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas de Colombia (2006) señalan la importancia del paso del número natural hasta el número racional desde la comprensión de las medidas.

Obando, Vasco & Arboleda (2013) sobre la generación del número racional a partir de la razón, señalan:

> En su forma más general, una razón entre dos cantidades[1] es una nueva cantidad que surge de la comparación por cociente entre ellas, y por lo tanto expresa la medida relativa de una de ellas tomando la otra como unidad. Esto permite diferenciar la relación entre las cantidades de la razón como cuantificación objetivada de dicha relación (p.980).

[1] Una atribución de cantidad "es aquella que realizada sobre un objeto permite realizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar o quitar). Si la atribución es de naturaleza continua, entonces refiere a una magnitud, la cual es susceptible de ser medida, pero si es de naturaleza discreta, refiere a una pluralidad y es susceptible de ser contada" Obando ét al., (2013, p.978).

Para Leontiev (1978) el hombre actúa para satisfacer sus necesidades, tales actuaciones las realiza en forma colectiva, utilizando instrumentos[2] (medios externos) que potencian su acción sobre el medio.

De otro lado, la teoría de la Objetivación (Radford, 2006- 2011-2013; Roth, Radford, & LaCroix, 2012) sostiene que una característica esencial de la actividad es el reconocimiento tanto del sujeto, de la comunidad, de las herramientas semióticas y de los materiales, como de otras características de las prácticas culturales como aspectos constitutivos de la actividad. Vinculada con la "actividad" se considera "la objetivación" que se entiende como un proceso en el cual el conocimiento emerge desde la interacción social, desde la dialéctica entre el sujeto y la naturaleza, y desde las maneras de acceso al conocimiento.

A partir de las "actividades" se promueve la "objetivación" como procesos que transforman al sujeto, quien a su vez transforma el conocimiento. En el marco de esta dualidad "actividad-objetivación" se moviliza, genera y cuestiona el conocimiento.

Marco teórico

Se consideran cuatro ejes interrelacionados: el enfoque sociocultural de Vygostky (1982), la teoría de la Actividad de Leontiev (1978), la teoría de la Objetivación de Radford (2006-2011-2013) y el conocimiento matemático que subyace en la objetivación del número racional; los ejes se articulan en la metodología.

Estos ejes, se entrelazan desde el concepto de aprendizaje propuesto por Vygostky (1982) el cual da preponderancia al entorno social que motiva al niño hacia la apropiación del conocimiento históricamente acumulado, en interacción con otros sujetos (el profesor y otros alumnos) en condiciones socioculturales determinadas. El alumno se desenvuelve en un contexto, la escuela, que le ofrece un entorno con características propias y una cultura ajustada a su forma de pensar en su comunidad. Así logra desarrollar una actividad social en la cual se produce y se reproduce el conocimiento, dotándolo de sentido. Desde la actividad matemática, logra concebir al objeto matemático "número racional" como un estado único de comparación para todas las magnitudes de la misma especie.

Metodología

Las actividades focalizan la atención tanto en la descripción de interacciones entre los alumnos, como en el análisis e interpretación de los componentes de la actividad.

Actividad 1

Se propone a los niños la siguiente actividad cuyo propósito es diferenciar la "relación entre las cantidades" de la "razón como cuantificación", que precede a la objetivación del número racional.

Material. Tortas fraccionarias, hojas de papel, colores.

Enunciado. En un supermercado se encuentran canastas de huevos rojos unos y blancos otros. Usted debe llenar las canastas A y B de modo que el número de huevos blancos y rojos

[2] Un instrumento es al mismo tiempo un objeto social al cual han estado incorporadas y fijadas las operaciones de trabajo históricamente desarrolladas (Leontiev, 1978, p. 268).

conserven la misma proporción mostrada en la canasta C. Posteriormente debe empacar 33 huevos de tal suerte que la proporción sea la misma mostrada para la canasta C (Figura 2).

La actividad está en relación con el conjunto de acciones dirigidas socialmente para alcanzar un fin: objetivar el número racional a partir de la razón. Para lograrlo existe un doble objeto-motivo: el del profesor en su enseñanza y el del alumno en su aprendizaje; cuando este doble objeto-motivo converge en uno, se ha logrado la objetivación, en este caso la del número racional.

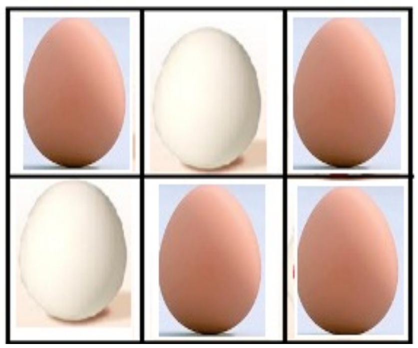


Figura 2. Canasta C

Figura 3. Canasta A

Figura 4. Canasta B

La actividad que realizan los niños está constituida por acciones organizadas, estructuradas y orientadas por el profesor hacia la consecución de una finalidad, las acciones les permite identificar ideas clave para reconocer las relaciones entre las cantidades y objetivar la razón como cuantificación.

Para lograr el objetivo conforme a las condiciones reales, los niños realizan operaciones tales como: contar con los dedos, repartir los huevos en las celdas, y conservar la "proporción" que tienen los huevos en la canasta C. En la Figura 5 se muestra una respuesta de uno de los niños; en esta situación no se cuestiona el concepto de razón.

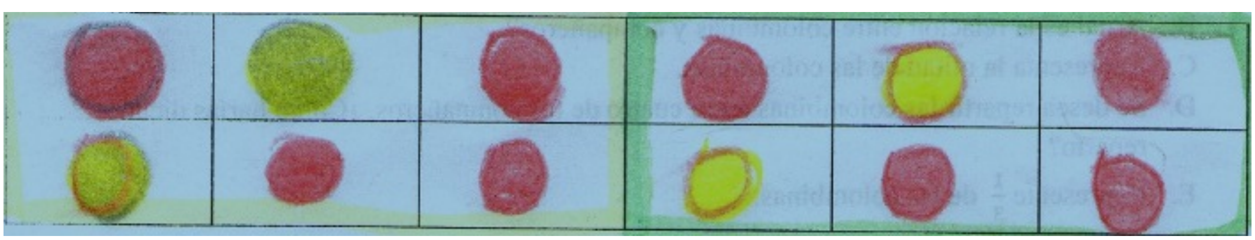


Figura 5. Solución de uno de los niños.

Para expresar su solución, los niños utilizan instrumentos materiales y psicológicos (medios semióticos de objetivación, artefactos tecnológicos, sistemas de signos) que son portadores de prácticas sociales y formas culturales que mediatizan y materializan el pensamiento; en este sentido, Radford (2006) argumenta "los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación…" (p.7). Se aprecia que el niño ha "preservado" la configuración mediante la reproducción de la ubicación de los huevos en la canasta C.

En el siguiente episodio, se puede analizar las interacciones entre los niños (en el aula) mediante palabras que componen aspectos subjetivos como partes constituyentes del proceso de la objetivación del número racional.

Usamos la letra P para denotar al *profesor* ; N1, N2, N3 denota a los *niños*.

P: … en la canasta C ¿qué es esto? (*señala toda la canasta*) ¿Cómo están repartidos los huevos?
N1: Que hay cuatro, cuatro unidades rojas y dos blancas.
P: ¿Cómo se puede llamar esa repartición? ¿Cómo se puede indicar?
N2: Una fracción
P: Y ¿Cómo la expresaríamos?
N2: Seis cuartos…

El episodio evidencia una manera de comparar cantidades y examinar las relaciones entre ellas por medio de una razón, comparan la cantidad total con respecto a una parte de ella, indicando que $\frac{6}{4}$ es una fracción, es decir, denominan la razón como una fracción. Algunas personas utilizan la palabra fracción para referirse específicamente a una comparación parte-todo. También puede referirse a cualquier número escrito en la forma simbólica $\frac{a}{b}$ (Lamon, 2012).

N2: O dos cuartos
N1: Si
N3: Profe, también se puede decir que… que hay cuatro medios
P: ¿Eso qué nos indica?
N3: Que es equivalente cuatro medios a dos unidades, que son dos huevos, cuatro medios de huevos rojos y dos huevos enteros, la unidad completa de huevos blancos.

La comprensión del enunciado en esta situación debe tomarse de la respuesta (N2: O dos cuartos), que es una expresión de la situación que N1 pone a disposición de los demás miembros del grupo, donde N3, indica la equivalencia para expresar la misma propiedad característica de las cantidades comparadas, y en particular, igual medida relativa. En el proceso de solución de la situación, N3 realiza la objetivación de la razón $\frac{4}{2}$: 2, y logra identificar la cuantificación de la relación cuando afirma "ser el doble de" cuantificada como 2.

En la actividad donde se solicita llenar la canasta con 33 huevos, los niños dieron respuestas que se agrupan según el modelo ilustrado en la Figura 6.

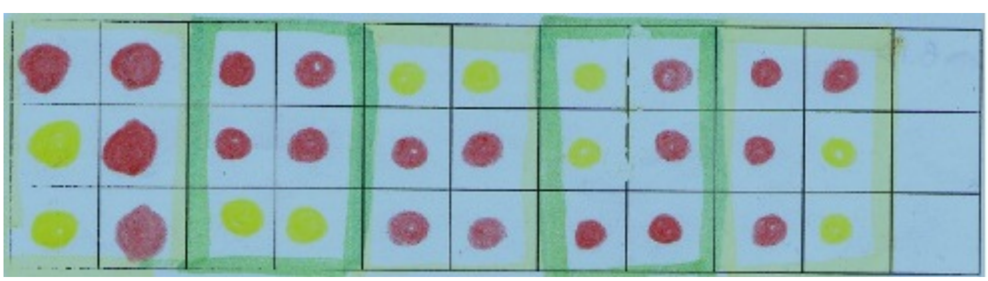


Figura 6. Solución dada por un niño.

En esta respuesta el niño deja tres celdas vacías. Parece claro que no identifica la relación entre el número de huevos rojos y el número de huevos blancos, como el criterio requerido para empacar los huevos de acuerdo con la proporción dada inicialmente.

La Figura 7 muestra la reinterpretación del problema, y la Figura 8 muestra la solución y la justificación de uno de los niños.

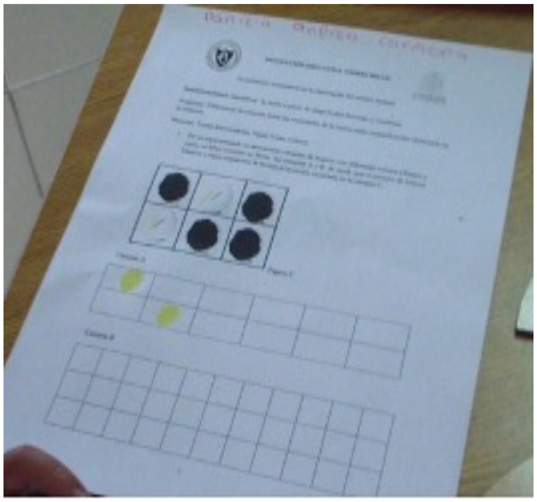
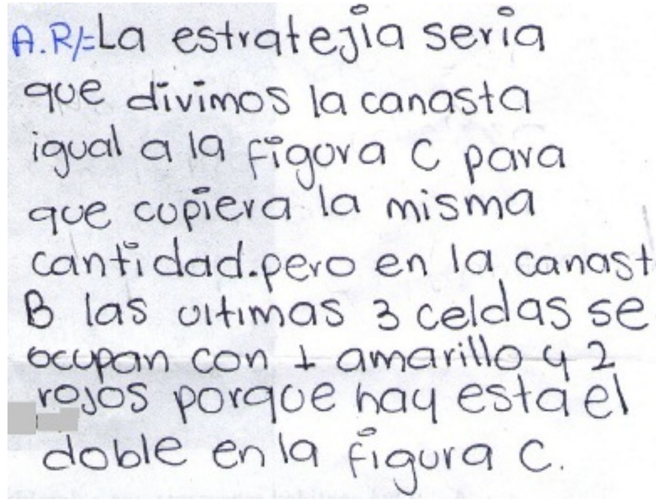


Figura 7. Reinterpretación del problema.



A.R/: La estratejia seria
que divimos la canasta
igual a la figora C para
que copiera la misma
cantidad. pero en la canast
B las ultimas 3 celdas se
ocupan con 1 amarillo y 2
rojos porque hay esta el
doble en la figura C.

Figura 8. Expresión escrita de la solución.

En la ubicación de los 33 huevos , inicialmente el niño realiza un proceso similar al realizado con los 12 huevos, aunque es válido, inicia con una estrategia que consiste en observar la relación “ser el doble de” , este proceso le permite encontrar una representación simbólica equivalente a la relación 2 a 4 , la cual percibe como 1 a 2. La estrategia le permitió reconocer el objeto razón, es decir, objetivar la razón entre dos cantidades.

En la situación anterior, los niños a partir de su contexto cultural, “en sus actuaciones y formas de pensar han codificando y refinado la historia cultural de la humanidad. Este refinamiento conlleva una determinación sucesiva de conocimiento” (Radford ,2013; p.15).

Actividad 2

Se propone a los niños la siguiente actividad cuyo propósito es realizar la medición de una longitud con unidades artificiales para la generación y comprensión del número racional.

Material. Artefactos del entorno.

Enunciado. Medir la longitud del lado de un “rectángulo” ubicado sobre el piso de la cancha de basquetbol de la Institución.

Los niños se dividen en dos grupos y establecen unidades artificiales para realizar la medición, una de ellas es el zapato y la otra una cartuchera (Figuras 9 y 10).

Figura 9. Midiendo con la cartuchera.

Figura 10. Midiendo con los zapatos.

En el siguiente episodio se aprecian algunas interacciones, en el entorno natural escolar, vinculadas con la comprensión del número racional.

P: …vamos a continuar con el proceso de medición que hemos venido haciendo, …hoy vamos hacer la medida de la longitud de este rectángulo, unos van a medir un lado y los otros iden el otro lado, ustedes deciden como hacerlo, a medida que lo hacen, van hablando, discutiendo y reflexionando sobre esta parte de la medición.
(Silencio)
N1: Nosotros vamos a medir con una cartuchera.
(*Silencio*)
P: …¿Cómo lo van a medir ustedes?
N2: Con los zapatos
P:¿Ese zapato que representa para ustedes?
N2: Una…
N3: una unidad de medida
(*Silencio*)
N1: Tomé como unidad de medida esta cartuchera.

El anterior episodio da evidencia sobre el papel que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social, se piensa con y a través de los artefactos culturales. “Los artefactos no son meras ayudas al pensamiento (como lo plantea la psicología cognitiva) ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de éste” (Radford, 2006;p.107).

N1: Y la estoy poniendo varias veces, donde queda pongo mi dedo para poderla poner acá.
N1: Al parecer mi compañero me hizo perder la cuenta, voy a volver a empezar.
(Silencio)
P: Dos medidas distintas y ¿sí lo pueden hacer con dos medidas distintas?
N2: Si
P: ¿Por qué?
N4: Porque las dos son unidades de medida ¿no?
N3: Porque se pueden dividir
N1: En este momento mi compañera está terminando de hacer la medición. Y le va dando... y le dio…
N5: Nooo, me dio veintidós pero me sobró un pedazo.
N1: A mi compañera le dió veintidós, pero le acaba de sobrar un pedazo, hay que hacer la medición más pequeña.
N5: hagámosla entonces con este lapicero.
(*Silencio*)
E1: Profe pues, mi compañera midió con la cartuchera y le acaba de sobrar un pedazo, entonces vamos a…
N1: Le dio veintitrés y le sobró un pedacito
N5: Mire profe… me dio veintidós…
P: ¿Veintidós, qué?
N5: Veintidós cartucheras, pero me sobró este pedazo, por lo cual estoy midiendo con una unidad más pequeña, que es con este lapicero.
P: Una unidad más pequeña, entonces ¿la cartuchera ya nos les va a servir como unidad de medida?
N5: No

En los diálogos se puede identificar que al no obtener una medición precisa de la longitud del lado del rectángulo con la unidad inicial establecida arbitrariamente, los estudiantes la cambian por otra unidad de medida más pequeña, posiblemente con el objetivo de que la comparación sea un número natural.

N1: En estos momentos nos acaba de sobrar un pedazo, un pedacito más chiquito que el de la cartuchera, entonces vamos a coger una unidad más grande, un poco más grande.
(*Silencio*)
N1: Hay un color y si nos queda grande le sacamos punta.
N6: Hagamos con un borrador
N1: No
N6: Es mejor con este borrador
N1: Vamos a seguir con un color
N6: Y con un borrador
N1: Perdón, … sí y con un borrador
N6: uno, pongan el otro… dos…

A partir de los diálogos se logra advertir elementos conceptuales, como: la escogencia de una unidad de medida, clave en el proceso de objetivación del número racional, el cambio de la unidad medida, asociado al rol social de las prácticas de medición y la adquisición de significados en torno a la noción de unidad de medida; ello da cuenta de cómo los niños generan objetos conceptuales, éstos "son patrones fijos de actividad reflexiva […] incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2006, p. 111). Se identifica que los niños comprenden el proceso de conteo, pero no han logrado establecer la relación entre las magnitudes.

P: ¿Quién quiere contar cómo se realizó la medición?
N6: Yo noté que, como es, que nosotros también estábamos midiendo con, como se dice, con un zapato más… mucho más grande, pero nos quedaba siempre (*Silencio*) eh nos sobraba.
N5: Sobraba, entonces.
N6: Nos sobraba mucho pedazo.

En los anteriores diálogos, se logra identificar, que la unidad artificial establecida no cabe un número exacto de veces en la longitud a comparar.

N5: Entonces eh el zapato nos dio diecisiete, pero pues no quedó completo porque quedó sobrando, entonces dividimos la unidad de medida en una unidad más pequeña.
P: Y ¿cuál era su unidad de medida?
N5: El zapato.
P:¿Dividieron a quién?
N5: A la unidad de medida
N5: Y nos dio diecisiete y medio (*Silencio*)

En este momento, los niños dividen la unidad en sub-unidades para generar un número racional, pero aún no lo logran identificar debido a que no han realizado la acción de comparación de las dos magnitudes, para determinar la relación entre ellas, aunque para calcular la medida de la longitud, colocaron una magnitud sobre la otra, estableciendo aparentemente una comparación entre magnitudes.

P: ¿ Cómo fue la relación que les dio en la medida?
(*Silencio*)
N6: Fue exacta.
N6: Eh mmm…
P:¿Cómo se logró?
N6: Comparando (*Silencio*)

Los niños han logrado identificar que al colocar una magnitud sobre la otra se obtiene una medida “exacta”, lo cual indica que la longitud es conmensurable con la unidad de medida elegida.

P: Bueno, cuéntenme entonces… si ustedes hubieran tenido, otras unidades para medir esa longitud, ¿Con cuál creen ustedes que les daría más precisa?
N5: Con el metro.
N5: Porque el metro se puede dividir, eh en centímetros y los centímetros en milímetros.
N6: Unidades más pequeñas
N5: Si, unidades más pequeñas.
P¿Cómo sería la comparación?
(*Silencio*)
N5: Daría más exacta.
P: ¿Cómo llaman ese resultado?
N5: Racional
N5: Un numero racional.

Los niños logran objetivar el número racional a partir del proceso de medición, tomando una unidad artificial, sin embargo reconocen que es necesario el uso de un patrón de medida estándar como el metro, con el cual pueden obtener unidades de la misma especie cada vez más pequeñas y lograr más exactitud para la obtención del número racional.

Conclusiones

La mediación semiótica instrumental mediatiza y materializa el pensamiento, pero no es suficiente para producir conocimiento, se debe favorecer la interacción entre los niños y entre los niños con otras personas, en esta relación sujeto-sujeto, la elaboración del conocimiento es negociado y compartido.

El aula es el espacio de interacción donde el niño, través de los recursos materiales que le brinda el entorno sociocultural, puede formalizar las generalizaciones y las síntesis sobre la formación de conceptos.

El paso del número natural al número racional puede ser logrado mediante el uso de situaciones de medida, en las que la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir.

Es en la realización de las actividades, en las prácticas sociales, donde se adquiere el saber como proceso de elaboración de significados, donde el niño dota de sentido a los objetos conceptuales que encuentra en su cultura, es decir, es el proceso donde el conocimiento emerge de la interacción social, el sujeto se transforma y al mismo tiempo transforma al conocimiento. es en esta relación donde se da el encuentro sujeto-objeto, es decir la objetivación.

Referencias

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.). *Rational numbers: An integration of research,* 13–47. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Charalambous, Y., Pantazi, D (2007). Drawing on a theoretical model to study students understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 64, 293-316. doi: 10.1007/s10649-006 - 036-2.

Escolano, R. (2010). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. Recuperado el 15 de mayo 2012 en http://www.google.com.co/#hl=es&output=search&sclient

Gould, P., Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2000). *One_Third is Three-cuarters of One-Half*. Recuperado el 10 de marzo 2012 en http:// www.merga.net.au/documents

Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding:Esential content knowledge and instructional strategies for teachers.* New york: Routledge.

Leontiev, A. (1978). *Actividad, conciencia, personalidad.* Ediciones Ciencias del Hombre.

Mazzocco, M., Devlin, K. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11, 5, 681–691.doi: 10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x.

Ministerio de Edducación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Obando, G., Vasco, C y Arboleda, L. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: Configuraciones epistémicas para la educación básica. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 26, (p.p. 977 – 988). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Petit, M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions. Bringing research to the classroom.* New york: Routledge.

Ponton, T. (2012). *La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el Aprendizaje inicial de los números racionales*.Disertación doctoral de Educación Matemática no publicada. Universidad del Valle, Colombia.

Puerta, F. (2012). *Un recorrido geométrico por los diferentes conjuntos numéricos*. Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias.Universidad Nacional de Colombia . Envigado: Gobernación de Antioquia.

Radford, L. (2006). Introducción Semiótica y Educación Matemática. *Relime, Número Especial*, 7-21. Université Laurentienne, Ontario, Canada.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In Ubus (Ed). *Proceding of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, Vol. 4, (p.p. 17-24). Ankara, Turkey, PME.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. J*ournal of Research in Mathematics Education*, 2,1, 7- 44. Doi:http//:doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Roth, W., Radford, L., & LaCroix, L. (2012). Working With Cultural-Historical Activity Theory. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research,* 13(2), Art. 23. Recuperado el 15 de Febrero 2013 de :http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs1202232

Vygostky, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher Psychological processes.* Cambridge, MA:Harvard University Press.

Vygostky, L. (1982). *Pensamiento y lenguaje. Barcelona.* Barcelona: Paidós.