UN REPORTE DE LA INVESTIGACIÓN: CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LOS CONCEPTOS ESPACIO VECTORIAL R^2 Y R^3 DESDE LA TEORÍA APOE

Miguel Rodríguez Jara, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. El presente artículo da cuenta de la primera etapa de nuestra investigación en curso, esto es, una construcción cognitiva llamada descomposición genética para los conceptos matemáticos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y, su respectivo tránsito. La indagación que hacemos de las ideas en torno al concepto espacio vectorial se sitúa en el marco teórico y metodológico que sustenta esta investigación, –la teoría APOE–. Como resultado de esta etapa, presentamos una descomposición genética hipotética y la explicitación de algunos elementos constitutivos de ésta; además de algunas construcciones y mecanismos mentales que estamos proponiendo con el fin de mostrar que la coordinación de los procesos asociados con el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y los cartesianos $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ podrían ayudar en la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$; donde las geometrías y sus axiomáticas estarían incidiendo en dichas construcciones.

Palabras clave: teoría APOE, descomposición genética, espacio vectorial R^2 y R^3

Abstract. This article reports on the first phase of our ongoing research, that is, a cognitive construction called genetic decomposition for mathematical concepts vector space R^2 and R^3 and their respective transit. The investigation of the ideas around the concept vector space is supported by the theoretical and methodological framework of given by APOS theory. As a result at this level of the work, we present a hypothetical genetic decomposition and explanation of some elements of it, plus some mental constructions and mechanisms that we are proposing, in order to show that the coordination of the processes associated with the vector space R^2 and Cartesian R^2 and R^3 could help build cognitive vector space R^3. Here, geometries and her axioms are influencing the constructions.

Key words: APOS theory, Genetic decomposition, vector space R^2 and R^3

Algunos antecedentes que aportan a la investigación

Para Dorier (1995a, 1995b) el concepto de espacio vectorial así como el de grupo, tiene una naturaleza distinta a la de otros conceptos. El concepto espacio vectorial, desde un punto de vista epistemológico, más que ayudar a resolver nuevos problemas es visto como un concepto unificador, generalizador y formalizador; al igual que el concepto de límite (Dorier, 2000; Artigue, 2003).

Por otro lado, pensando en su aprendizaje, (Harel, 2000) da cuenta de las dificultades de los estudiantes al ser introducidos repentinamente a los conceptos básicos de los espacios vectoriales desde una perspectiva netamente algebraica, razón por la cual se dificulta la comprensión de éstos. Para subsanar tal deficiencia, desde el punto de vista de su enseñanza, Harel propone una secuencia que está basada en el *"principio de representación múltiple"* con la idea de incorporar un componente geométrico-algebraico y permitir a los estudiantes una representación de las ideas a trabajar (Dorier y Sierpinska, 2002).

Indagar en una problemática

La enseñanza del álgebra lineal está presente en el plan de estudio de diversas carreras universitarias de nuestro país, como por ejemplo: ingenierías, licenciatura en física, licenciatura en matemática, pedagogía en matemática, por citar algunas. Además, si agregamos que los procesos cognitivos que ésta demanda, dada la naturaleza abstracta de los conceptos que están involucrados en su aprendizaje, aspecto que se reporta en las investigaciones desarrolladas en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y, en particular, de los espacios vectoriales (Dorier, 2000), se requiere de un trabajo que favorezca una construcción conceptual efectiva por parte del estudiante.

Por otro lado, desde un punto de vista matemático, cualquier espacio vectorial de dimensión dos o tres es isomorfo a R^2 y R^3 respectivamente, lo que realza la inquietud de conocer más acerca de ellos, así como también indagar cómo R^2 y R^3 incide en la generalización a R^n como espacio vectorial. Lo anterior son algunas de las razones que avalan nuestra investigación y el trabajo de una propuesta didáctica que permita un quehacer efectivo en el aula para la construcción de los espacios vectoriales en cuestión y en particular el tránsito de R^2 a R^3. A modo de ejemplo, en un estudio que realiza (Robinet, 1986) se puede apreciar que el concepto de dependencia lineal en los espacios vectoriales R^2 y R^3 no está del todo claro en estudiantes universitarios, al constatarse que la mayoría de ellos contestó positivamente a lo siguiente: *Si u, v y w son vectores de R^3, y si dos a dos no son colineales, ¿son los tres vectores linealmente independientes?*

Si a lo anterior agregamos que los conceptos que son parte del álgebra lineal, en particular los espacios vectoriales R^2 y R^3, se relacionan con otras áreas de la matemática, cálculo en dos o tres variables, por citar un ejemplo, nos alienta aún más en pensar lo importante de abocarnos a investigar en cómo se construyen los espacios vectoriales en cuestión.

Marco teórico: la teoría APOE

Considerando que nuestro objetivo para esta primera etapa de investigación se centrará en la construcción del concepto espacio vectorial R^2 para transitar al espacio vectorial R^3, desde la perspectiva de la teoría APOE. Esta teoría trata acerca de la construcción del conocimiento matemático y su desarrollo en el individuo, Dubinsky quien propone esta teoría y la ha desarrollado junto al grupo RUMEC, manifiesta lo siguiente:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996)

Si analizamos en detalle la cita anterior podemos apreciar algunos elementos que están involucrados en la comprensión de un concepto matemático, a saber las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas y, además, tipos de abstracción reflexiva, (desde la perspectiva piagetana) que la teoría llama mecanismos mentales, a saber: interiorización, coordinación, inversión y encapsulación, las cuales se articulan con las construcciones mentales. En la Figura 1 se puede observar la relación entre las construcciones y los mecanismos que se han mencionado.

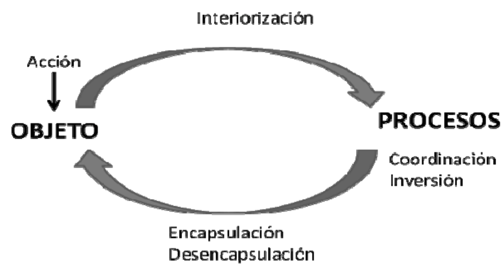

Figura 1. Construcciones y mecanismos (Asiala et al., 1996)

A continuación damos una descripción detallada de cada uno de los elementos de la teoría APOE mencionados anteriormente, y a través de algunos ejemplos iremos delineando el énfasis de nuestra propuesta en la construcción de R^2 y R^3 como espacio vectorial.

Consideremos los vectores del espacio vectorial R^2, un conjunto de acciones para el concepto de combinación lineal en dicho espacio vectorial puede ser: la multiplicación de un vector específico por un escalar específico o la adición de dos vectores específicos. Dichas acciones son relevantes como punto de partida para comenzar la construcción del concepto combinación lineal, al alero de su definición.

Volvamos sobre la combinación lineal, concepto que consideraremos fundamental en la construcción del espacio vectorial R^2. Si el estudiante reflexiona en relación a que: la multiplicación de un vector por un escalar determina un nuevo vector al igual que en la adición de vectores, independiente de cual sean éstos, y si al considerar escalares del cuerpo R y vectores de R^2 se piensa en combinarlos arbitrariamente para obtener un nuevo vector, o incluso, si dado un vector se piense en asociarle, aditivamente dos o más vectores, probablemente se esté en presencia de la combinación lineal como proceso.

Siguiendo con la misma idea, si el estudiante reflexiona respecto a la posibilidad de que dado un vector de R^2 este pueda ser escrito, de manera única, como combinación lineal de dos o más vectores dados, o, por otro lado, considerando la posibilidad de que todo vector de R^2 es una combinación lineal de vectores del mismo espacio, se piense en un álgebra de combinaciones lineales y, por ende, en la necesidad de regular, a través de axiomas, la interacción entre escalares y vectores. En este sentido estaríamos en presencia de la combinación lineal como objeto.

Finalmente, si a partir de la idea de un vector en combinación lineal de otros se piense en una ecuación vectorial y, se desprenden aspectos como: es posible caracterizar vectores a partir de de la combinación lineal asociada al vector nulo utilizando para ello, el esquema de sistema de ecuación para determinar los escalares y, a la vez, se considera el objeto matriz, y ciertas acciones y procesos asociados a los vectores en estudio (dependencia e independencia lineal), es probable que se esté en presencia de la combinación lineal como un esquema.

Para cerrar, cabe mencionar que si la acción multiplicación de un vector por escalar se reflexiona desde la clausura, como un axioma, la concepción acción que se establece, de la misma manera para la adición de vectores, permitiría avanzar en una concepción proceso, objeto o esquema de una combinación lineal. Ahora bien, desde un punto de vista del grado de inclusividad de las construcciones aludidas, podríamos pensar que éstas se desarrollan en un proceso lineal, esto en la práctica no es necesariamente así, (Trigueros y Oktaç, 2005). En definitiva, como se plantea en la siguiente Figura 2, lo importante es tener en cuenta la relación entre las construcciones mentales y los mecanismos de abstracción que están asociados y, además, cual es el papel de éstos en la construcción del concepto matemático en cuestión.

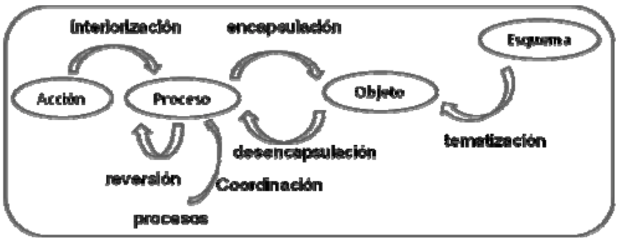

Figura 2: relación de las construcciones mentales y mecanismos de abstracción en la construcción de un concepto matemático

Ciclo de investigación de la teoría APOE

La teoría APOE nos provee de un ciclo de investigación, que se muestra en la Figura 3, el cual integra tres componentes a considerar en el proceso de investigación, a saber: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

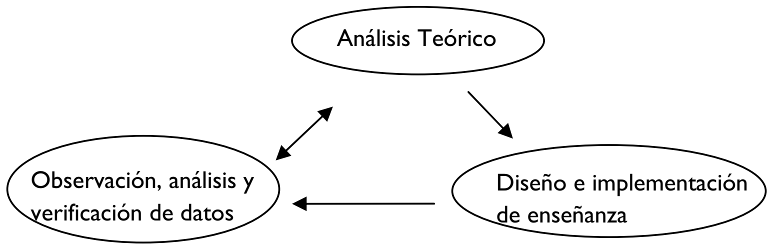

Figura 3: Ciclo de Investigación (Asiala, et al. 1996)

Como lo resaltan (Roa y Oktaç, 2010), el ceñirnos a este ciclo en el proceso investigativo permite tener una mirada más cercana y detallada del proceso de construcción del concepto en estudio y su relación con algunos otros conceptos que subyacen a su alrededor (Roa y Oktaç, 2010)

Descomposición genética hipotética de la construcción cognitiva de los espacios vectoriales R² Y R³

El diagrama que se presenta a continuación, Figura 4, pone de manifiesto nuestra reflexión de los conceptos, desde las construcciones y mecanismos mentales que se ponen de relieve en la construcción del concepto espacio vectorial R^2 como objeto, a partir del plano cartesiano R^2, y cómo se coordinan, o más bien cuál es el rol que juega el plano afín para que se alcance la coordinación de los procesos asociados a los objetos espacio vectorial R^2 y espacio cartesiano R^3, para llegar a construir el espacio vectorial R^3 como objeto, a través del espacio afín, como un camino viable.

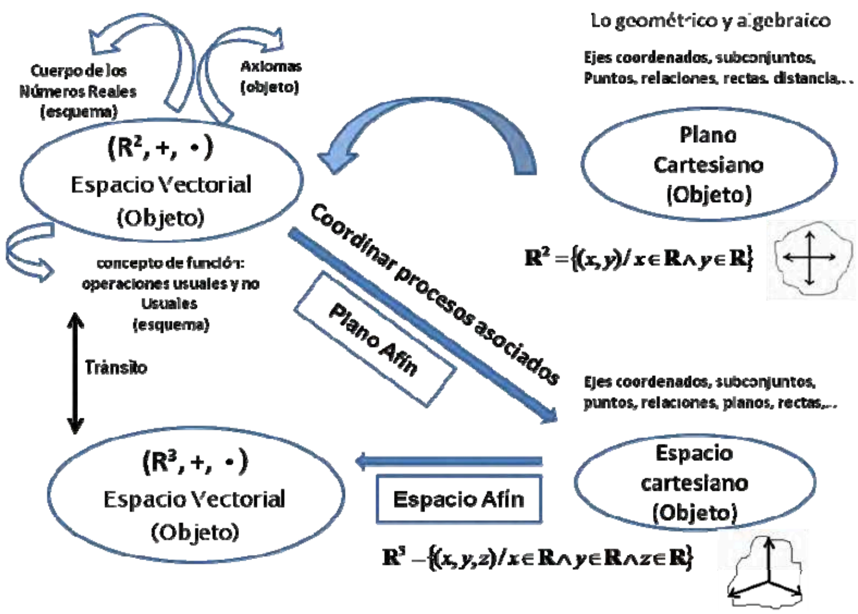

Figura 4: Diagrama de nuestra descomposición genética preliminar

En particular, centramos la atención en el papel que puede tener el cartesiano R^2 en la construcción del espacio vectorial R^2. En el siguiente diagrama, Figura 5, se resalta el papel de la parametrización como un mecanismo que ayuda a coordinar algunos procesos involucrados, teniendo como punto de partida la resolución de una ecuación lineal homogénea.

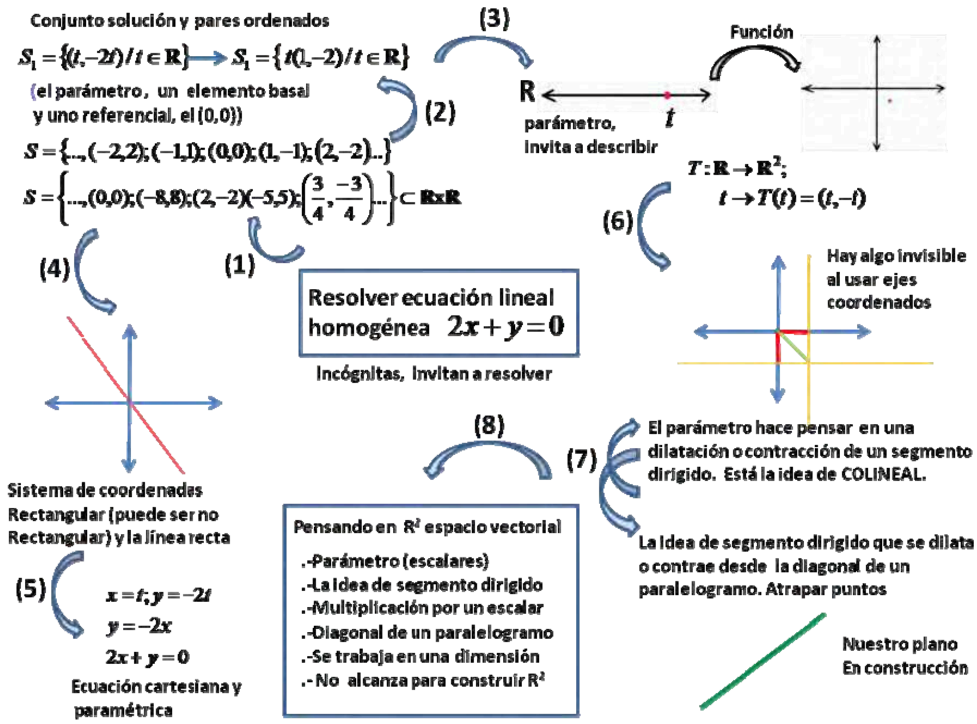

Figura 5: Sobre la incidencia del cartesiano R2 en la construcción de R2 espacio vectorial

Un primer aspecto a resaltar, considerando el diagrama anterior (Figura 5), es que al resolver una ecuación lineal homogénea con dos incógnitas nos hace destacar los pares ordenados y el conjunto solución *(1)* , el cual es no vacío pues el par (0,0) satisface dicha ecuación. Además, si se piensa en asignar un valor arbitrario a una de las incógnitas, es posible determinar el valor de la otra en función de dicho valor. Esto brinda la posibilidad de escribir el conjunto solución de dicha ecuación a través de un parámetro *(2)*. Por otro lado, si se repara respecto a que cada valor del parámetro le corresponde un par ordenado y no más de uno, a la luz de la operatoria involucrada, la idea de función se hace visible *(3)*. Más aún, si se piensa en los pares ordenados y la ecuación que los genera, desde la geometría cartesiana, el conjunto solución de una ecuación lineal homogénea se asocia a una recta que contiene el origen del sistema de coordenadas *(4)*. Luego, a partir de la ecuación cartesiana de la recta se obtienen las ecuaciones paramétricas o viceversa *(5)*.

La función y el par (0,0) sugiere tanto la idea de segmento dirigido, como la dilatación y la contracción de éste desde una triada de segmentos dirigidos anclados al origen *(6)*. Lo que conecta con la geometría vectorial desde la regla del paralelogramo *(7)*, así, una componente geométrica al problema. En relación a (8), si pensamos en R^2 como espacio vectorial, se deja en evidencia un avance en la construcción de dicha estructura, con un componente algebraico y geométrico, pero a la luz de los elementos que se despliegan se puede constatar que no se logra construir la estructura R^2 espacio vectorial pues sólo es posible avanzar hacia la operación multiplicación de un escalar por un vector de R^2 *(2)*.

Por último si observamos el siguiente diagrama, Figura 6, se puede apreciar como a través del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, se desprenden los elementos necesarios que dan cuenta, por un lado, de la construcción de la estructura de espacio vectorial **(***9), (10)* y *(13)* con una carga algebraica y geométrica *(11), (12)* y **(***13)* y, por otro, desde el concepto de función y de parámetro, avanzar en la riqueza que brinda la estructura de espacio vectorial desde los endomorfismos *(14), (15)* y *(16)* y así, la aparición de otra estructura, la estructura de álgebra lineal *(17)* , que apuntará no tan sólo a dar cuenta de la importancia del papel unificador de la estructura espacio vectorial sino que además sienta las bases para avanzar en nuevas estructuras como los grupos lineales *(18)* que permiten entender el sentido de la unificación de las geometrías *(18)* y *(19)* desde el programa Erlangen propuesto por (Klein, 1872).

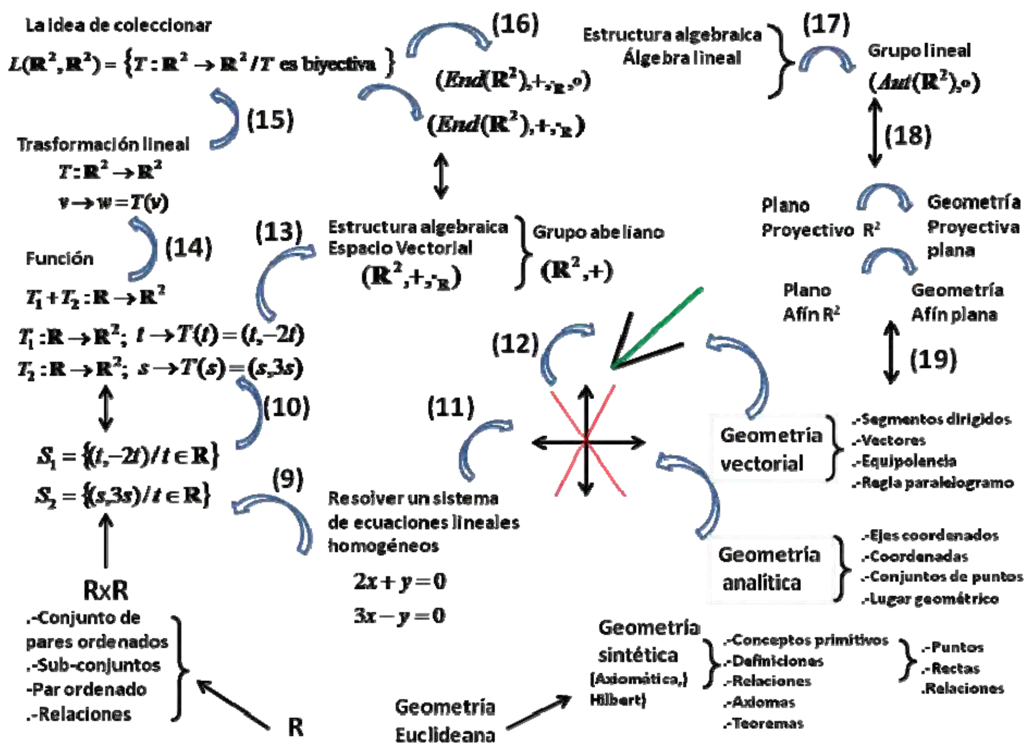

Figura 6: Una mirada del papel unificador y generalizador del espacio vectorial

A modo de conclusión

Para finalizar, consideramos que nuestra descomposición genética para la construcción cognitiva de los espacios vectoriales R^2 y R^3 se configura desde dos constructos matemáticos, la de parámetro y función, los cuales son transversales en la construcción que se persigue, y más aún son agentes coordinadores entre el espacio vectorial y el cartesiano asociado a él. La idea de parámetro permite un desarrollo algebraico, desde la resolución de un sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales y conecta con la idea de función. Por otro lado ésta nos sitúa en una mirada geométrica, desde la idea de segmento dirigido, evocando así algunos elementos de la geometría vectorial, por ejemplo la regla del paralelogramo en la adición de vectores. En definitiva, nuestra descomposición genética adquiere la característica de unificadora y generalizadora de los conceptos dispuestos alrededor del cartesiano R^2 ó R^3, según sea el caso.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10* (2), 117-132.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education* 6, 1-32.

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica, 22*(3), 227-261.

Dorier, J. L. (1995b). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 175-197.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 3-81), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series, 7*(3), 255-273

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24 – 41.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching Mathematics, With Particular Reference to the Learning and teaching of Linear Algebra: Old and New Observations. In J-L. Dorier (Ed), *On the teaching of Linear Álgebra* (pp 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Klein, F. (1872). Vergleichende Bertrachtungen uber neuere geometrische orschungen Erlangen. *in Mathematische Annalen, 43*, 63-100.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques, 18*(2), 191-230

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 157-176.