

## CONSTRUCCIONES MENTALES DE LOS CONCEPTOS ALEATORIO Y DETERMINISTA A PARTIR DE LA REGRESIÓN LINEAL

Bernardita Pérez Ureta, Marcela Parraguez González  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
bernardita.perez01@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Chile

**Resumen.** Las nociones asociadas a los conceptos de aleatoriedad y determinismo tales como paradigma, variable, parámetro, parecen entrelazarse durante la enseñanza escolar y aunque es uno de los objetivos fundamentales planteados en el Marco curricular de educación media en Chile, el distinguir entre los fenómenos aleatorios y los deterministas (MINEDUC, 2009, p. 146) esto no se logra, según los antecedentes recopilados. En nuestra investigación abordamos la comprensión y las diferencias del concepto aleatorio y determinista a través de construcciones y mecanismos mentales, en torno a la variable aleatoria a partir de la regresión lineal, a la luz de la teoría APOE; de tal forma de ofrecer herramientas orientadoras a los docentes, de los aprendizajes de los conceptos de aleatoriedad y determinismo.

**Palabras clave:** random, deterministic, regression, linear, APOS

**Abstract.** The notions associated with the concepts of randomness and determinism such as paradigm, variable, parameter, seem intertwined during schooling. And although is one of the key objectives outlined in the secondary school curriculum framework in Chile to distinguish between random phenomena and deterministic (MINEDUC, 2009, p. 146) this is not achieved, according with the evidence collected. In our investigation we address the understanding and the differences between two concepts, random and deterministic through mental constructions of random variable starting from the linear regression using the APOS theory so that the teachers get tools in learning.

**Key words:** aleatorio, determinista, regresión, lineal, APOE

### Introducción

La estadística puede dividirse básicamente en dos ramas, estas son, la descriptiva y la inferencial, la primera se refiere al resumen de datos y la descripción de ellos, y la segunda, en la cual centraremos nuestro estudio, se relaciona con el proceso de utilizar datos en la toma de decisiones; es justamente aquí donde el concepto de aleatoriedad junto al determinismo se vuelven bases a la hora de entender la modelación estadística y matemática, esto es definir un modelo o expresión matemática que nos permita describir un fenómeno donde interviene o no el azar.

Bajo la mirada del *determinismo* es posible predecir en forma certera y exacta las consecuencias de un fenómeno antes que este ocurra no dando lugar a la incertidumbre, con esto se puede asegurar el hecho de que un experimento es reproducible ya que uno de sus supuestos es que causas iguales causan efectos iguales. En contraposición, la *aleatoriedad* se asocia a todo fenómeno o suceso que se rige bajo el azar, es decir se refiere a aquello que no se puede determinar con certeza antes que se produzca, por lo mismo, en un experimento aleatorio no es posible reproducir todas las condiciones para obtener idénticos resultados, y aunque fuese

posible reproducir las condiciones del experimento, aun así no obtendríamos los mismos resultados. Bajo estas definiciones, los fenómenos de naturaleza determinista y aleatoria pueden ser estudiados mediante un modelo matemático o estadístico respectivamente, en los cuales hemos definido cuatro factores relevantes para la caracterización cognitiva del concepto de aleatoriedad y determinismo: el objeto de estudio del modelo, el objetivo que persigue la creación del modelo, el tipo de variable en juego, y restricciones y/o posibilidades que brinda el modelo. Dentro de estos factores uno que cobra especial importancia es la identificación del tipo de variable en juego, pues a través de ella se toma la decisión del modelo a trabajar, sin embargo, la variable aleatoria presenta dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas al ser instruida durante la enseñanza escolar secundaria. Al respecto las investigaciones de Ruiz y Albert (2005), Ruiz (2006), Londoño y Montoya (2010), Azcárate, Cardeñoso y Serradó (2006), Batanero y Serrano (1995), Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), el Informe de la SOCHE de Araneda y del Pino (2011) y el Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M de Ávalos y Matus (2010) coinciden en tres aspectos fundamentales que inciden en la comprensión sobre lo aleatorio, estos aspectos son:

- 1) Poca claridad de la noción de variable aleatoria y tendencia a asociarla con el mismo significado de variable algebraica (en el contexto matemático, determinista), lejos de relacionarla con su significado funcional (en el contexto estadístico, aleatorio).
- 2) Los textos no aportan a la construcción del significado de variable aleatoria, enmarcándose por lo general en un tratamiento cuantitativo de la variable y fuera de contexto lo que no permite al estudiante relacionar el concepto con el cotidiano.
- 3) Poca preparación de los profesores de matemática en la enseñanza de la estadística, lo que contribuye a la poca claridad de la noción de variable aleatoria.
- 4) Lo que muestra un denominador común que conforma nuestro problema de investigación: *“La comprensión y diferenciación de los conceptos aleatorio y determinista”*

### Objetivos de investigación

En el Marco Curricular publicado por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), en enseñanza básica se establece que el eje Datos y Azar debe introducir el tratamiento de datos y modelos para el *razonamiento en situaciones de incerteza*, también se refiere al estudio de conceptos básicos que permitan *analizar y describir procesos aleatorios*, y en Educación Media, se propone en este eje desarrollar conceptos y técnicas propias de la estadística y la teoría de probabilidades que permitan realizar inferencias a partir de información de naturaleza estadística y *distinguir entre los fenómenos aleatorios y los deterministas*. (MINEDUC, 2009, p.

146). Sin embargo planteamos que estas concepciones de aprendizaje propuestas por el MINEDUC en el marco curricular no se desarrollan en el estudiante durante su enseñanza escolar básica y media, debido a que: No existe en el eje datos y azar del currículo nacional una definición que posibilite la caracterización de un razonamiento de tipo aleatorio, que permitan conducir y crear situaciones de aprendizaje orientadas a desarrollar tales características en el estudiante.

Hemos escogido la regresión lineal simple como punto de partida para ofrecer herramientas orientadoras para el aprendizaje de los conceptos aleatoriedad y determinismo, que nos permitan *caracterizar a través de construcciones y mecanismos mentales lo aleatorio y lo determinista*, debido a que se ha considerado que la enseñanza de la función lineal se presenta como un obstáculo para la enseñanza posterior de la regresión lineal simple, al respecto la investigación realizada por Agnelli, Konic, Peparelli, Zön y Flores (2009) afirma:

Consideramos que el uso de métodos determinísticos en la resolución de problemas matemáticos opera como un obstáculo para el abordaje de problemas de naturaleza aleatoria. Por lo que la noción de obstáculo se constituye en la herramienta didáctica que nos permite el estudio de esta problemática (Agnelli et al., 2009, p. 2).

Según esta investigación el obstáculo didáctico aparece al enseñarse sin las limitaciones que posee el modelo de la función lineal, pues es válido sólo en el caso que las variables en juego sean de tipo determinista. Para lograr nuestro objetivo indagaremos a partir de una descomposición genética, las concepciones que tienen sobre la variable aleatoria y determinista, y sobre regresión lineal los alumnos de la carrera de pedagogía en matemática que cursan su último año. Una vez documentada la descomposición genética, daremos elementos a partir de ella, para diseñar una propuesta didáctica en la enseñanza del modelo de regresión lineal, que permita generar en el alumno la noción de variable aleatoria y a su vez diferenciarla claramente de la determinista.

#### *Caracterización de las construcciones mentales del concepto de aleatoriedad y determinismo a la luz de la teoría APOE*

La teoría APOE creada por Ed Dubinsky junto al grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) nos brinda un marco que permite explicar las dificultades asociadas al aprendizaje de la variable aleatoria y determinista, así como también plantear un camino de construcción de sus aprendizajes y con ello construir la caracterización cognitiva de lo aleatorio y determinista, para que esto ocurriese, según este marco teórico, el estudiante debiese mostrar a partir de comportamientos observables, las construcciones mentales

(Dubinsky, 1991): Acción, Proceso, Objeto y Esquema, dispuestas en la descomposición genética (DG), que es una modelación epistemológica-cognitiva de los conceptos en estudio. A continuación entregaremos algunos ejemplos de construcciones mentales acción, proceso y objeto, dispuestas en el diseño de la DG hipotética del concepto de variable aleatoria:

*Acción.* En esta fase el estudiante repite varias veces un experimento con los mismos datos de entrada. Si constata que ante reiterados intentos obtiene siempre los mismos resultados y puede predecirlos con exactitud, podrá percatarse de que está en presencia de una variable determinista, en caso contrario, de una variable aleatoria.

*Proceso.* El estudiante comprende que la variable aleatoria arroja una probabilidad de ocurrencia, y es capaz de estimar algún dato dentro del rango de los datos dados observando el gráfico de dispersión, entendiendo la probabilidad como una posibilidad de ocurrencia y no como una predicción exacta. En cuanto a la variable determinista, es capaz de trabajar con ella como un ente abstracto y no necesita realizar la acción para saber su valor, por ejemplo, dado  $y = x + 2$ , para encontrar el valor de  $y$  para cualquier valor de  $x$  simplemente dirá que  $y$  es siempre dos más que  $x$ , entendiendo que  $y$  es determinista ya que dado el valor de  $x$  puede determinar en forma exacta el valor de  $y$ .

*Objeto.* La variable aleatoria es entendida como una función de probabilidad y como tal es posible obtener su inversa, o es posible realizar distintas operaciones sobre ella, como por ejemplo, es posible estimar el valor de procedencia de la variable de respuesta. A su vez, la variable determinista es entendida como una magnitud que varía de acuerdo a ciertos valores que pertenecen a un dominio determinado.

#### *Descomposición genética hipotética del concepto de variable aleatoria*

Para diseñar una DG hipotética de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal simple, teniendo en cuenta las construcciones descritas anteriormente, realizamos una encuesta exploratoria cuya finalidad era indagar las concepciones que poseen los estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) sobre la variable aleatoria y determinista. Esta encuesta nos permitió identificar algunas concepciones o nociones que se presentan con dificultad sobre la variable aleatoria, además de identificar las diferencias entre esta variable y la determinista y los modelos asociados a ellas, función lineal y regresión lineal simple. Participaron 6 estudiantes voluntarios los que contestaron cuatro preguntas en una sesión de 30 minutos. Los resultados obtenidos fueron:

(a) En la pregunta 1 (*¿Qué elementos usted considera importantes en el aprendizaje del concepto de variable aleatoria?*), los aprendices en general no dan demasiada importancia al concepto de función al momento de instruirse en el concepto de variable aleatoria, que justamente es uno de los conceptos que consideramos más importantes, ya que la variable aleatoria es una función y no una variable como se conoce matemáticamente. Asimismo, no le asignan un gran valor al concepto de probabilidad que también juega un rol importante en la definición de este concepto.

(b) En la pregunta 2 (*¿Qué es para usted una variable aleatoria? ¿Cuál es la diferencia con una variable algebraica (determinista)?*), respecto a la definición de variable aleatoria, del total de respuestas sólo un encuestado respondió correctamente la definición, que representa el 17%; el 50% responde en forma errónea relacionándola más bien con el concepto de magnitud aleatoria y no con lo que esperábamos –una función–, y el resto que representa el 33% de los estudiantes no sabe su definición.

(c) En la pregunta 3 (*¿Cómo relaciona usted los conceptos de función lineal y regresión lineal?*), respecto a la relación entre función lineal y regresión lineal simple, el 67% de los encuestados nos entregó definiciones erróneas, entregando respuestas en las cuales consideraban la función lineal como el ajuste de la regresión lineal simple, y el 33% no sabía cómo se relacionaban.

(d) En la pregunta 4 (*¿Qué textos recomendarías de apoyo para complementar estos conceptos?*), respecto a la bibliografía estadística, sólo el 33% de los encuestados dio una referencia y el 67% restante no conoce libros en estadística respecto del tema de regresión lineal simple.

A partir de este análisis de resultados y las construcciones descritas anteriormente (Acción, Proceso y Objeto) se diseñó la descomposición genética hipotética, considerando que los estudiantes no tenían claro la relación funcional de la variable aleatoria, ni la importancia del tipo de sucesos involucrados, o de la intervención de la probabilidad, o que tampoco tenían claras las diferencias o relaciones entre la función lineal y la regresión lineal simple.

A continuación presentamos una DG de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal, siendo uno de los objetivos diferenciar las variables en ambos paradigmas (el aleatorio y el determinista), ya que es la variable la que permite diferenciar el modelo de la función lineal de la regresión lineal simple, pues nos entrega una conceptualización del paradigma bajo el cual estamos trabajando (Figura 1).

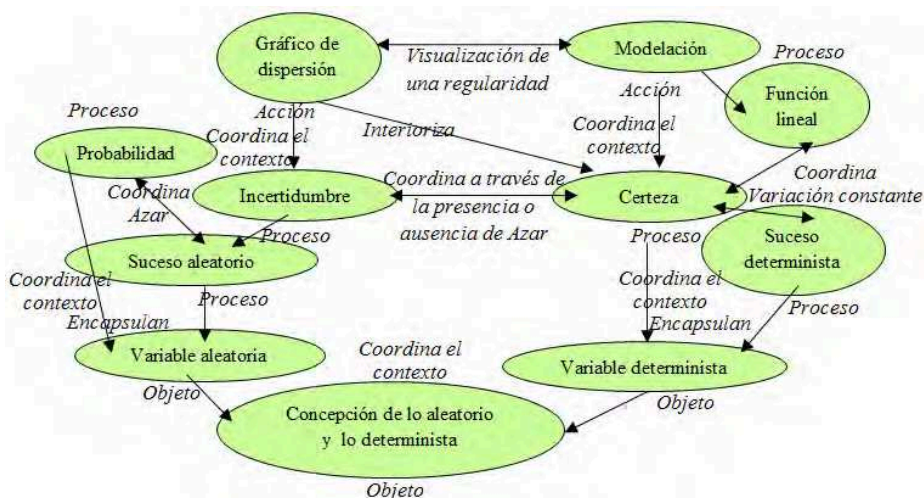


Figura 1: DG hipotética de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal.

Según la descomposición genética expuesta en la Figura 1, para construir el concepto funcional de la variable aleatoria un estudiante tomará los datos de entrada y salida obtenidos de un experimento e intentará modelarlos identificando si hay o no una regularidad, esa acción de modelación sobre los datos la realiza por medio del gráfico y es interiorizada en un proceso cuando el estudiante es capaz de coordinar, asociando la presencia de incertidumbre o certeza a las variables en juego, según intervenga o no el azar.

Cuando el proceso de incertidumbre y certeza se coordinan a través de la presencia o ausencia del azar forman un nuevo proceso, el de suceso aleatorio (o el de suceso determinista, dependiendo de la situación presentada). Esto se desarrolla del siguiente modo: el estudiante comprende que el valor de la variable es producto de la incertidumbre (o bien de la certeza, respectivamente), y al asociar el valor de la variable con una probabilidad como proceso, como una posibilidad de ocurrencia, construye una concepción objeto de la variable aleatoria.

Análogamente, al asociar el valor de la variable con un suceso determinista como proceso, es posible que la relacione con el modelo de la función lineal y construya una concepción objeto de la variable determinista.

En ambos casos, es capaz de entenderla como una función en el caso aleatorio donde a cada valor de la variable le asigna una probabilidad, o bien, como parte importante de la función lineal (en el caso de la determinista).

Entonces, una vez que el estudiante ha encapsulado (que consiste básicamente en la conversión de un proceso –una estructura dinámica– en un objeto –una construcción estática–) los procesos de suceso aleatorio y probabilidad como objeto, función variable aleatoria y los

procesos de suceso determinista y función lineal como objeto variable determinista, el estudiante es capaz de percatarse de las diferencias conceptuales entre el modelo de regresión lineal simple y la función lineal, construyendo a su vez un nuevo objeto, el concepto de aleatorio y determinista.

### Metodología y desarrollo de la investigación

Una vez definida nuestra DG la documentamos, para constatar la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto diseñamos un cuestionario que permitiese identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética a través de la presentación de distintas situaciones en torno a los conceptos de aleatoriedad y determinismo. En nuestra investigación, cuyo carácter es de tipo cualitativo, se trabajó con 9 estudiantes, atendiendo a los criterios de avance curricular (alumnos que habían aprobado las asignaturas relacionadas con el método de análisis de regresión lineal simple y que estaban realizando su trabajo de tesis); estos estudiantes fueron agrupados en dos casos (basándonos en la metodología de estudio de casos) como se muestra en la tabla 2 siguiente, en la cual se presenta el desglose del diseño y aplicación de los instrumentos:

Caso 1	Caso 2
7 Estudiantes de Pedagogía en Matemática	2 Estudiantes que siguen ambas carreras (Pedagogía en Matemática y Estadística) en forma paralela.
<i>Encuesta exploratoria</i>	<i>Encuesta exploratoria</i>
<i>Análisis teórico:</i> DG	<i>Análisis teórico:</i> DG
<i>Aplicación de Instrumentos:</i> 1 cuestionario.	<i>Aplicación de Instrumentos:</i> 1 cuestionario.
<i>Análisis y Verificación de datos</i>	<i>Análisis y Verificación de datos</i>

Tabla 1: metodología del estudio de casos de la investigación.

La documentación de las construcciones de los conceptos aleatorio y determinista para extraer las evidencias empíricas de nuestra investigación se llevaron a cabo durante el año 2012 en dos momentos en los cuales participaron estudiantes de pedagogía en matemática del Instituto de Matemáticas (IMA) de la PUCV (Chile), y dos estudiantes que además seguían en paralelo la carrera de Estadística durante el primer semestre académico del año 2012.

### Conclusiones

La evidencia empírica con sustento teórico obtenida del análisis de los datos, nos permitió confirmar la necesidad de la concepción objeto de los conceptos aleatorio y determinista para resolver situaciones a través de estos modelos, ya que de lo contrario no es posible plantear un modelo que permita responder a interrogantes planteadas en una situación de aleatoriedad

versus determinismo, pues no hay manejo de estos modelos a nivel teórico y por ende no es posible desencapsular los conceptos involucrados en ellos. También podemos reportar, que no es suficiente con una concepción acción del gráfico de dispersión y de la modelación expuestas en la DG, sino más bien es necesario que los estudiantes al momento de abordar los contenidos referidos a la regresión lineal simple hayan construido previamente una concepción proceso de estos conceptos (gráfico de dispersión y modelación) que les permita no sólo manipular herramientas sino también analizar desde lo conceptual el comportamiento de los datos, ya que sólo así el contexto cobra importancia en el análisis de la información, con lo cual podríamos plantear un refinamiento de la DG, rescribiendo los conceptos de modelación y gráfico de dispersión como concepciones proceso.

Del análisis realizado también recogemos el hecho de que la diferenciación de suceso y variable cobra relevancia, desde el punto de vista de la identificación de qué es lo que se está investigando (suceso) y a través de qué característica lo vamos a investigar (variable), ya que al no tener en claro (o claros) estos conceptos, según los resultados arrojados por las evidencias empíricas del cuestionario, el estudiante no logra modelar, pudiendo ser un factor influyente en la modelación, es decir, sino se tiene claridad en lo que se va a investigar ¿para qué investigar?

Según los antecedentes expuestos, la enseñanza de la función lineal se presenta como un obstáculo didáctico ante la enseñanza de la regresión lineal. Al respecto observamos que el hecho de enfrentar al estudiante a problemas en diversos contextos, le entrega mejores herramientas de discriminación del tipo de variable involucrada, poniéndolo en conflicto con sus conocimientos previos, por lo tanto, cuando el estudiante no es motivado a analizar el paradigma de trabajo (determinista o aleatorio) al momento de comenzar su aprendizaje en torno a la regresión lineal, no tendrá claridad de por qué debe modelar datos que se ajustan a una recta con un modelo distinto al de la función lineal (vista previamente en el currículum académico). Además, pudimos comprobar que efectivamente en nuestros informantes la función lineal se presenta como un obstáculo al obviarse el paradigma de trabajo al cual responden los problemas que se modelan a través de esta función, sin embargo si la función lineal es construida haciendo hincapié en el contexto de la situación que se desea modelar a través de ella, en el cual están involucradas variables de tipo determinista, y analizando qué es lo que se quiere predecir, consideramos que el obstáculo no debería presentarse en el estudiante.

Con todo esto, consideramos que la característica principal que debe tener una propuesta didáctica en torno a la enseñanza de la regresión lineal simple que permita comprender y



diferenciar los conceptos aleatorio y determinista es la dimensión semántica, ya que el contexto cobra relevancia en la elección de los modelos que permiten trabajar la situación para calcular o para estimar algún dato.

### Referencias bibliográficas

- Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, S., Zön, N. y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17, 52-61.
- Araneda, A., del Pino, G., et al. (2011). Recomendaciones para el currículum escolar del eje Datos y Probabilidad. *Sociedad Chilena de Estadística. Sección de Educación Estadística*. Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de <http://www.soche.cl/index.html>
- Ávalos, B., Matus, C. (2010). *La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional*. Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M. Gobierno de Chile, Ministerio de educación. Chile.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias*, 16(1), 85-97.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J.M., Serradó, A. (2006). Analizando la resistencia de los profesores para enseñar probabilidad en Educación Obligatoria. *Hipótesis alternativa. Boletín de la IASE para América Latina*, 5-15
- Batanero, C., Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Revista UNO*, 5, 15-28. Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/aleatoriedad.htm>
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123. Dordrecht: Kluwer.
- MINEDUC (2009). Gobierno de Chile, Ministerio de Educación. *Marco curricular de enseñanza básica y media actualización 2009*. Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de [http://www.mineduc.cl/index5\\_int.php?id\\_portal=47&id\\_contenido=13293&id\\_seccion=3264&c=1](http://www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=13293&id_seccion=3264&c=1)
- Londoño, D., Montoya, E. (2010). *Azar, aleatoriedad y probabilidad: Significados personales en estudiantes de Educación Media*. Recuperado el 15 de septiembre de 2012 de [http://www.contraloria.gob.pa/inec/IASI/docs/announcements/documentos/MemoriasComunicaciones/2%20Montoya\\_%20Azar%20Aleatoriedad%20Probabilidad%20SignificadosPersonales.pdf](http://www.contraloria.gob.pa/inec/IASI/docs/announcements/documentos/MemoriasComunicaciones/2%20Montoya_%20Azar%20Aleatoriedad%20Probabilidad%20SignificadosPersonales.pdf)

Ruíz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ruíz, B., Albert, J. (2005). Didáctica de la Probabilidad y Estadística. El Caso de la Variable Aleatoria. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 185-191. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.