LA ELIPSE DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
yodbb1@yahoo.es, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación que reportamos, da cuenta de un estudio sobre la comprensión del concepto Elipse en estudiantes entre 16 y 18 años, bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico y, estudio de casos como diseño metodológico. Nuestra problemática se sitúa al abordar la elipse solamente a través de las ecuaciones cartesianas, afirmamos que estas técnicas no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto, cuando decimos comprensión profunda, estamos pensando en que el estudiante pueda comprender la elipse en los modos: Sintético-Geométrico (como sección cónica en el espacio/curva que la representa en el plano), Analítico-Aritmético (como pares ordenados que satisfacen la ecuación de la elipse) y Analítico - Estructural (como lugar geométrico). A lo largo de la investigación evidenciamos que los estudiantes logran una mayor comprensión del concepto elipse cuando se enfrentan a situaciones donde interactúan los tres modos de pensar.

Palabras clave: modos de pensamiento, elipse, lugar geométrico

Abstract. The research, reports a study on the understanding of the concept Ellipse on students between 16 and 18 years, under a cognitive approach, which uses the modes of thought of Anna Sierpinska theoretical framework, and case study as methodological design. Our problem lies in addressing the ellipse only through the Cartesian equations. We claim that these techniques are not sufficient to develop a deep understanding of the concept. When we say deep understanding, we are thinking that the student can know the ellipse in modes: synthetic-geometric (as conic section in space/curve that represents it on the plane), Analytical Arithmetic (as ordered pairs that satisfy the equation of the ellipse) and Analytical - Structural (as locus). Throughout the investigation we found that students gain a greater understanding of ellipse when faced with situations where they interact the three ways of thinking.

Key words: modes thinking, ellipse, locus

Descripción de la problemática y objetivos de investigación

La elipse se trata en los programas oficiales de nuestro país dando prioridad a técnicas analíticas, y es parte de la asignatura álgebra y modelos analíticos, en donde se propone "reconocer qué lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas" (Ministerio de Educación, 2001, p.41). Mayoritariamente se le solicita al aprendiz de este tópico, determinar la ecuación de la elipse, conociendo los elementos (focos, vértices, entre otros) o bien conociendo la gráfica.

Consideramos que este enfoque centrado en las ecuaciones cartesianas que definen la elipse, no es suficiente para lograr su comprensión, cuando nos referimos a comprensión de la elipse, estamos pensando que el estudiante pueda relacionar las distintas definiciones asociadas a ella.

A partir de nuestras inquietudes nos propusimos como objetivo general, ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas basada en nuestra investigación para la enseñanza del concepto elipse y para ello planteamos tres objetivos específicos:

1. Indagar en los modos de comprender la elipse que prevalecen en los estudiantes que aprobaron la asignatura de álgebra y modelos analíticos de un establecimiento educacional chileno, y explorar si estos modos permiten movilizar la elipse en sus distintas definiciones en el plano cartesiano.
2. Indagar en los elementos de la matemática que propician el tránsito entre las definiciones de elipse como: sección cónica en el espacio/curva que la representa en el plano, como pares ordenados que satisfacen la ecuación de la elipse y como lugar geométrico.
3. Diseñar y aplicar actividades de aprendizaje que promuevan el tránsito entre los modos de pensamiento (Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético, Analítico-Estructural) de la elipse, para estudiantes de la asignatura de álgebra y modelos analíticos de un establecimiento educacional chileno.

Marco teórico

Desde nuestros objetivos de investigación, realizamos la elección del marco teórico: los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), porque nos provee de elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes comprenden los objetos matemáticos, en este caso, la elipse. También permite explicitar los enfoques (analíticos, geométricos o estructurales) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas y cuáles son las conexiones que logran establecer entre ellos.

Sierpinska (2000) distingue tres modos de pensamiento: uno que tiene que ver con el pensamiento práctico –sintético-geométrico (SG)– y otros dos que tienen que ver con el pensamiento teórico –analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). En nuestro contexto investigativo, consideramos que los estudiantes comprenden la elipse, cuando logran el tránsito entre los modos de pensamiento SG - AA- AE de ella, (figura 1).

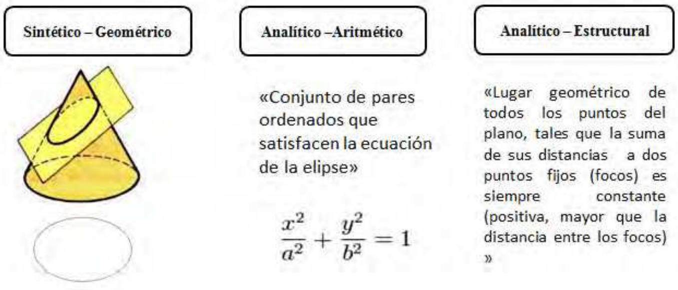


Figura 1: Modos de pensar la elipse.

Metodología y resultados

Desde nuestro objetivo de investigación es pertinente utilizar un diseño metodológico de, estudio de caso múltiple, en la medida que "…Los estudios de casos son adecuados para un análisis intensivo y profundo de uno o pocos ejemplos de ciertos fenómenos;..." (Goetz y LeCompte, 1988, p. 69). Contrasta realidades específicas, pero de ninguna manera explicaciones genéricas y definitivas sobre la realidad estudiada, "la investigación de estudio de caso no es una investigación de muestras. No estudiamos un caso fundamentalmente para comprender otros casos. Nuestra primera necesidad es comprender el caso concreto" (Stake, 1995, p. 4). Destacamos la importancia de esta metodología, ya que, a través de la comprensión de realidades específicas nos proporcionan de antecedentes empíricos fundamentales en la toma de decisiones para los propósitos de la investigación.

Las unidades de análisis están conformadas por:

Caso 1: 10 estudiantes de cuarto año de enseñanza Media de buen rendimiento, que aprobaron el curso de álgebra y modelos Analíticos (asignatura donde se trata la elipse).

Caso 2: 11 estudiantes pertenecientes a la asignatura de álgebra y modelos analíticos, estos informantes desconocen la elipse. Los cuales son etiquetados por E30, E31……E40.

Ambos grupos pertenecen a un establecimiento educacional de la comuna de Ovalle, dónde actualmente tiene acceso uno de los investigadores. Los informantes accedieron voluntariamente a ser partícipes de esta investigación.

Para el caso 1 diseñamos y aplicamos un cuestionario exploratorio, para indagar en los modos de pensamiento que privilegian estos estudiantes. Para el caso 2, diseñamos y aplicamos un conjunto de actividades con el fin de documentar las articulaciones entre los tres modos SG - AA - AE de la elipse. Estas actividades fueron construidas desde la teoría de los modos de pensamiento y utilizando elementos encontrados en las indagaciones epistemológicas, matemáticas y didácticas (Referidas al segundo objetivo específico de investigación).

Resultados del primer caso

Se evidencia que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen y son capaces de graficarlas, es decir, logran conexiones entre los modos SG y AA en el plano, bajo ciertas condiciones (ecuaciones de la elipse centrada en el origen).

Estos mismos estudiantes presentan grandes dificultades para comprender la elipse en un modo AE. Esto queda en evidencia, cuando se enfrentan a preguntas donde deben recurrir a la definición de la elipse como lugar geométrico. Ninguno de los estudiantes del caso 1, fue capaz de responder la siguiente pregunta:

Pregunta 6 del cuestionario: En la Figura 2, determine la longitud del eje mayor de la elipse de focos F y F'

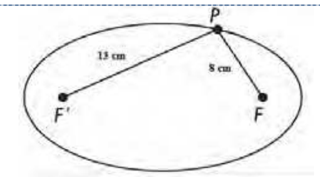


Figura 2

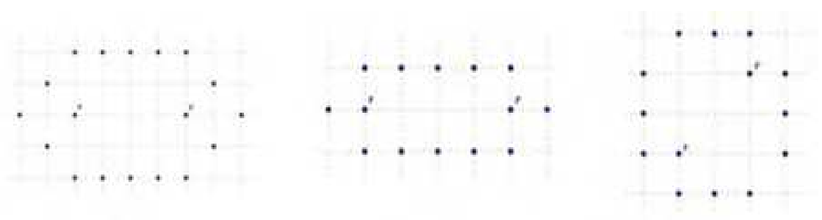
Resultados del segundo caso

A continuación se presentan algunas de las preguntas del cuestionario, que fue aplicada al grupo del caso 2 de estudio.

La primera actividad es propuesta en la geometría del taxista (Krause, 1986), con ella, se busca propiciar el tránsito entre los modos SG - AE de la elipse. Consideramos que la distancia discreta facilita la comprensión de la propiedad que define la elipse como un lugar geométrico.

Actividad 1 : Los taxistas de "Geocity" recorren su ciudad transitando por las calles paralelas llamadas Calle1 , Calle 2 , etc… hasta calle 30, y las avenidas , que son perpendiculares a las calles, llamadas Avenida 1, Avenida 2 , etc… hasta Avenida 25. Sólo les permite detenerse en las esquinas, por lo cual ellos miden las distancias en "cuadras" y siempre utilizan los recorridos más cortos posibles

Pregunta 5: Las figuras representan elipses en "Geocity" Los puntos F y F´ se conocen como focos de la elipse. ¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a los focos en cada uno de los casos?



Análisis de las respuestas

Todos los estudiantes muestran evidencias del tránsito entre los modos SG y AE de la elipse, estableciendo en cada una de las figuras la siguiente condición: la suma de las distancias de todos los puntos de la elipse a los focos es constante. Ejemplo de respuesta: el estudiante E36 (figura 3), determina las distancia en cuadras de F y F' a todos los puntos de la elipse, estableciendo que *"la suma de las 2 distancias de los focos siempre es 8"*.

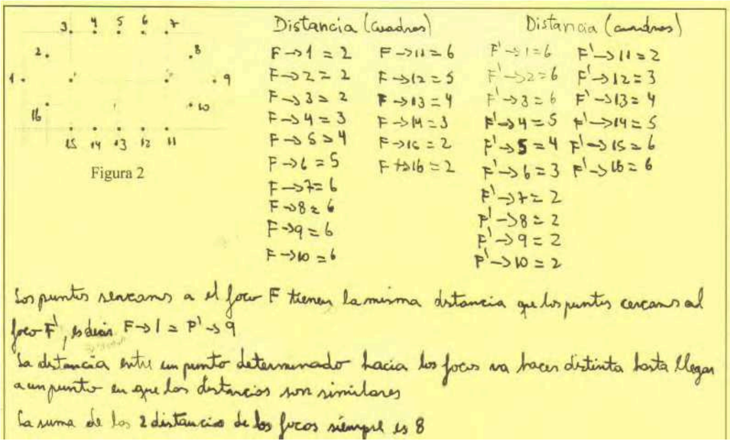
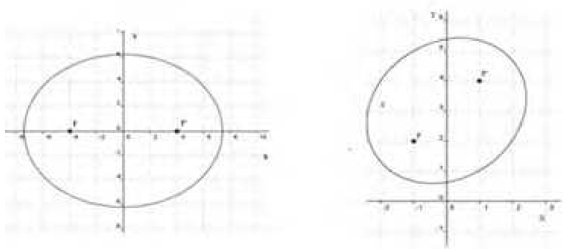


Figura 3: respuesta del estudiante 36

La segunda actividad evidencia los posibles tránsitos entre los modos SG - AE - AA de la elipse en el plano cartesiano. A continuación se muestran algunas de las preguntas.

Actividad 2, *Pregunta 1: Las figuras representan elipses de focos F y F' en el plano cartesiano. ¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a los focos? En cada uno de los casos justifique para algunos puntos de la elipse.*



Análisis de las respuestas

Todos los estudiantes logran conexiones entre los modos SG y AE de la elipse, estableciendo las distancias de los puntos de coordenadas exactas a los focos, para ello utilizan la fórmula de distancia entre dos puntos del plano. 9 de ellos establecen correctamente el valor de la constante en todas las figuras y los demás (2) determina su valor en alguna de ellas. A continuación se presenta un ejemplo de respuesta:

El estudiante E35 (figura 4), determina la distancia de dos puntos a los focos F y F', utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano, pero solo en los casos que considera necesario. Concluyendo que: *"la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos f y f' es* $3+\sqrt{5}$*"*.

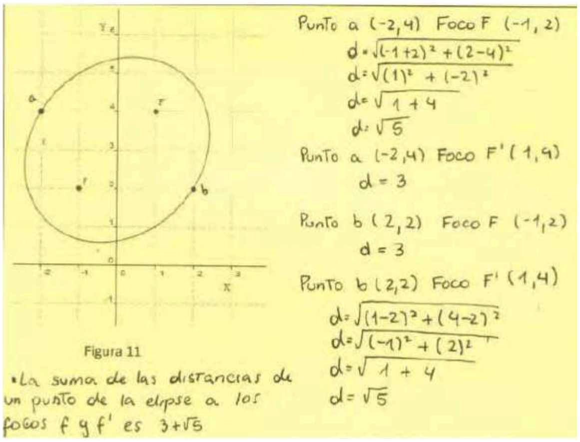


Figura 4: respuesta del estudiante 35.

Pregunta 4: Sea *P(x,y)* un punto cualquiera de la elipse (Figura 5), Establezca una ecuación que defina la elipse

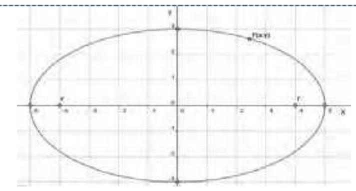


Figura 5

Análisis de las respuestas

7 de los estudiantes de este segundo caso, muestran en sus argumentos evidencias del tránsito SG - AE - AA. Estos estudiantes para transitar del modo SG a AA muestran comprender la elipse en un modo AE y a través de las distancias establecen la ecuación (figura 6). Los demás estudiantes (4) muestran conexiones entre los modos SG y AE.

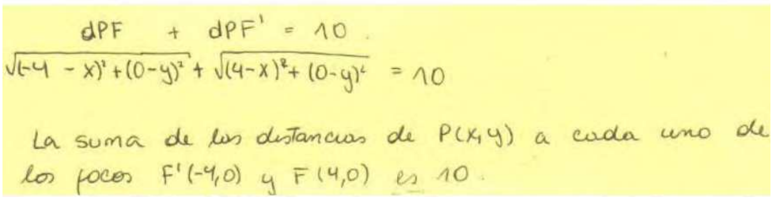


Figura 6: respuesta del estudiante E35.

La tercera actividad da evidencias sobre las posibles conexiones que realizan los estudiantes entre los modos SG (la elipse como sección cónica) - AE en el espacio. En un principio los estudiantes establecen las posiciones de los planos al intersectar a un cono de modo de formar una elipse. Luego se enfrentan a preguntas como:

Actividad 3, Pregunta 5: A continuación se muestra una animación en software cabri (Cabrilog, 2009) de la elipse en el espacio. Donde existen dos esferas inscritas en el cono y tangentes al plano. Sus puntos de contacto con el plano serán los focos de la elipse. Observa atentamente la animación (figura 7) y luego escribe tus argumentos para justificar que la curva formada es una elipse. (Puedes manipular la animación)

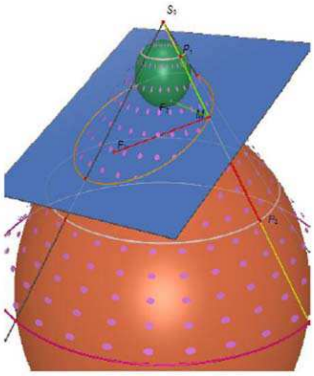
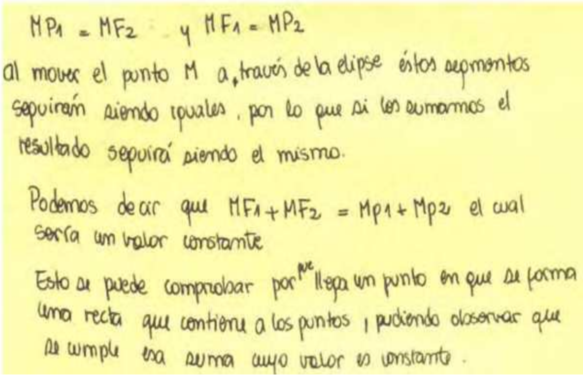


Figura 7: elipse en el espacio.



$MP_1 = MF_2$ y $MF_1 = MP_2$

al mover el punto M a través de la elipse éstos segmentos seguirán siendo iguales, por lo que si los sumamos el resultado seguirá siendo el mismo.

Podemos decir que $MF_1 + MF_2 = Mp_1 + Mp_2$ el cual sería un valor constante

Esto se puede comprobar porque llega un punto en que se forma una recta que contiene a los puntos, pudiendo observar que se cumple esa suma cuyo valor es constante.

Figura 8: respuesta del estudiante 32.

La mayoría de los estudiantes (9) justifican desde un modo SG en el espacio, a partir de la inclinación que presenta el plano, los demás (2) entregan argumentos en un modo AE (figura 8).

La mayoría de los estudiantes del caso 2, muestra en sus argumentos evidencias de la comprensión de un modo AE en las actividades presentadas en la geometría del taxista y también de la comprensión de los modos SG - AE - AA en el plano cartesiano. En el espacio, la mayoría comprende la elipse en un modo SG, pero presentan dificultades para relacionar los modos SG y AE. Al parecer las herramientas sintéticas (teorema de las tangentes a una circunferencia, esferas inscritas en el cono, entre otros) que permiten justificar la elipse en el espacio, no son comprendidas por la mayoría de los estudiantes en este nivel.

Conclusiones didácticas y reflexiones finales

Proponemos como sugerencias didácticas para el aprendizaje del concepto elipse en estudiantes entre 16 y 18 años, iniciar con actividades donde los estudiantes transiten entre los modos SG - AE; en particular indicamos para los aprendices las actividades presentadas en geometría del taxista, ya que, nos entregan importantes beneficios en la comprensión del modo AE a partir de un modo SG de la elipse. Los elementos de esta geometría (distancia discreta medida en cuadras, puntos como "esquinas") facilitan la comprensión de la propiedad que la define como lugar geométrico "la suma de las distancias de un punto de la elipse a ambos focos es siempre constante (mayor que la distancia entre los focos)", además permite probar que ésta se cumple para todos los puntos de la elipse, situación que no es evidente en la geometría euclidiana.

Evidenciamos que los estudiantes que comprenden la elipse en el modo AE, presentan mayores posibilidades de alcanzar la comprensión profunda del concepto, debido a que esto ayuda en la conexión con los otros modos SG y AA de la elipse.

Una vez comprendido el modo AE de la elipse en la geometría del taxista, los aprendices pueden establecer las conexiones entre los modos SG - AE - AA en el plano cartesiano, con los elementos propios de la geometría analítica, como, la distancia entre dos puntos del plano, concepto de conjunto solución de una ecuación, entre otras. Se sugiere presentar distintas elipses en el plano, y no solo aquellas centradas en el origen.

Consideramos pertinente promover el tránsito entre los modos SG - AE en el espacio, una vez comprendida la elipse en el plano, para ello proponemos, que los estudiantes puedan desarrollar tareas asociadas al teorema de Dandelin, sobre las esferas inscritas en un cono.

Para finalizar queremos enfatizar que las evidencias con sustento teórico, proporcionadas de los resultados de la investigación, contribuyen al desarrollo de la teoría de los modos de pensamiento en otros ámbitos, un tanto distante del álgebra lineal, como por ejemplo, en el estudio de las secciones cónicas; sin descuidar los elementos principales de la teoría.

Referencias bibliográficas

Cabrilog SAS. (2009). Creador de herramientas Matemáticas. Recuperado el 06 de abril de 2012 de http://gallery.cabri.com/figures/space/dandEll.cg3.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. España: Morata

Krause, E. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover.

Ministerio de Educación. (2001). Programa de estudio Algebra y Modelos Analíticos 3° Año Medio. Santiago: Mineduc. (Programa vigente decreto n°128/2001).

Sierpinska A. (2000). On some aspects of student's thinking in linear algebra. Dans J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers,

Stake, R. (1995). *The Art of Case Study*. London: Sage.