

EMPLEO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES PARA FORTALECER EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Alma Alicia Benítez Pérez
CECyT II “Wilfrido Massieu” - IPN
albenper@gmail.com

México

Resumen. El presente trabajo fue la culminación de dos investigaciones (20100459 y 20110397), en las cuales se analizó y discutió el Marco Teórico de las competencias matemáticas para el nivel medio superior (NMS), las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar estrategias didácticas que beneficiarán el fortalecimiento de habilidades y destrezas en el alumno, empleando la exploración de múltiples representaciones para impulsar el desarrollo de las competencias matemáticas en dos grupos de estudiantes del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT's) del NMS que cursaban la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral y cuyo objetivo fue identificar y caracterizar las competencias desarrolladas. Para observar e identificar dichos procesos se emplearon métodos cualitativos (observaciones en clase, videograbaciones, reportes escritos y tareas extraclase). A nivel de hallazgo hay un desarrollo de competencias matemáticas, así como un desempeño en el uso de conceptos.

Palabras clave: competencias matemáticas, representaciones, contextos simulados

Abstract. This work was the culmination of two investigations (20100459 and 20110987), in which were analyzed and discussed the theoretical framework of mathematical competencies for high school (NMS), the ideas developed in the theoretical, served as axes for design and implement instructional strategies that benefit the strengthening of skills and abilities in students, through the exploration of multiple representations fostering the development of mathematical competencies in two groups of students of the Centre for Science and Technology Studies (CECyT's) of NMS that coursed the learning unit of integral calculus and whose objective was the identification and characterization of the competencies developed. To observe and identify those processes were employed qualitative methods (classroom observations, videotapes, written reports and extracurricular tasks). A discovery level there is a math skill development and performance in the use of concept.

Key words: mathematics skills, representations simulated contexts

Introducción

En los programas de estudio de matemáticas de los CECyT's y en particular en el CECyT II “Wilfrido Massieu”, se menciona la importancia de preparar al estudiante para que desarrolle competencias en las que el proceso metodológico debe reflejar la aplicación de los conceptos y procedimientos, cuyos resultados justifiquen la solución de diversos problemas relacionados con los ámbitos académico, social y global. Sin embargo, en la actualidad el aprendizaje de la matemática es crítico, resaltando como uno de los indicadores el bajo rendimiento escolar, a fin de minimizar este estancamiento, debe incorporarse estrategias que permitan impulsar y fortalecer las competencias en matemáticas que permitan al alumno mostrar su saber hacer de manera reflexiva, utilizando el conocimiento que adquiere durante el proceso para transferir el aprendizaje a situaciones similares y diferentes. Ante esta situación surge la siguiente interrogante ¿Beneficia la implementación de estrategias didácticas para impulsar el desarrollo

de competencias matemáticas empleando la exploración de múltiples representaciones en problemas contextualizados?, cuyo propósito fue identificar y categorizar las competencias matemáticas adquiridas.

Competencias en matemáticas

La matemática escolar se asume en un contexto sociocultural y por ende los objetos de la matemática pueden tener múltiples sentidos. Esto hace posible reconocer objetos propios de la matemática escolar, distintos de los objetos de la matemática disciplinar, pues los objetos de la primera están en proceso de construcción. Se concibe además que la resolución de problemas en la escuela como un contexto en el que pueden ser enseñados, aprendidos y evaluados los conceptos, procedimientos, destrezas y estrategias y más aún donde puede manifestarse “el hacer matemáticas” con sentido. El concepto de competencia implica entonces la idea de una mente activa y compleja y por tanto la de un sujeto productor. Un sujeto que trabaja el conocimiento y los saberes que recibe, a partir de lo que posee y de lo que le es brindado desde su entorno. El significado de competencia en el contexto del aprendizaje de matemáticas se asocia a lo que la gente hace con objetos matemáticos, relaciones, estructuras, procedimientos, formas de razonamiento. Es decir, representa la construcción personal, en el sentido de uso del conocimiento, lo que hace el estudiante con lo que conoce. Por lo anterior, se entiende por competencia matemática la capacidad de administrar nociones, representaciones y utilizar procedimientos matemáticos para comprender e interpretar el mundo real. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el *saber qué*, el *saber qué hacer* y el *saber cómo, cuándo y por qué hacerlo*. Por tanto la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. Por lo que puede re-interpretarse como potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Hanesian (1983) y la de la enseñanza para la comprensión de Perkins (1999), Gardner (1999), Wiske (1999) y otros. En la primera, la significatividad de aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido de utilidad y eficiencia. En la segunda, la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos.

La presente investigación se ubica en la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral, la cual pertenece al área de formación Científica, Humanística y Tecnológica Básica del Bachillerato Tecnológico perteneciente al NMS del Instituto Politécnico Nacional, cuyo plan de estudio se basa en estándares de aprendizaje planteados en las competencias disciplinares, teniendo como

principales objetos de conocimientos: la integral indefinida, los métodos de integración y la integral definida, para movilizar diferentes capacidades relacionadas con: analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales, razonar correctamente en forma deductiva e inductiva; representar abstraer, relacionar, clasificar y aplicar conocimientos del Cálculo Integral para identificar y resolver problemas teóricos y reales utilizando diferentes lenguajes de representación: verbal, gráfico y/o simbólico.

Marco de referencia

Los programas de estudio a nivel bachillerato y particularmente los programas de los CECyT's (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos, área Físico- Matemáticas), mencionan la importancia de promover las habilidades del pensamiento; análisis, interpretación y síntesis, así como la elaboración de conjeturas, argumentación, abstracción y generalización; y en este sentido, las representaciones adquieren un papel importante, pues de ellas depende la estructura cognitiva en el estudiante.

Diversas han sido las investigaciones para analizar el desempeño que tiene las representaciones en el aprendizaje de la matemática, así como el estudio de la influencia que posee el manejo de varias representaciones para lograr la aprehensión de un objeto matemático. Los trabajos desarrollados por Kaput (1991), Goldin y Kaput (1996), Duval (2000) y Parnafes y diSessa (2004), respectivamente han destacado con mayor precisión el papel que desempeña emplear varios sistemas de representación en el proceso de la adquisición de un concepto, aunque sus posiciones no coincidan en su totalidad. Así, Kaput (1991) basa su análisis en la tradicional estructura del signo lingüístico tradicional, pero además amplía esta posición, ya que establece la relación entre lo que él llama notación A y su referente B, y aclara que todo puede ser expresado en forma material e incluso su correspondencia (posiblemente), pero sus relaciones se desarrollan únicamente a nivel mental (Goldin y kaput, 1996), actividad que adquiere un papel decisivo en la construcción de conceptos matemáticos. La tecnología, tales como: calculadoras graficadoras que entre sus atributos, son capaces de establecer los enlaces entre lo analítico o simbólico, lo gráfico y las representaciones en forma de tablas, para el caso de las funciones, proporciona una valiosa herramienta para ayudar a la comprensión de los estudiantes en desarrollo del álgebra (Kaput, 1993; Kaput, Noss y Hoyles, 2002). No obstante, Duval (2000) considera que las condiciones cognitivas internas de un sujeto para lograr la aprehensión del concepto, se enfocan en el desarrollo y fortalecimiento de "La Arquitectura Cognitiva", a través de una organización sólida de diferentes sistemas semióticos. Esta se logra cuando los sistemas de representación semióticas, adquieren el rango de registros semiótico,

pues se habla de los sistemas de producción necesarios en toda representación, y de las transformaciones que pueden tener, tratamiento y conversión.

Duval plantea la siguiente pregunta: “¿Cuáles son las condiciones cognitivas internas requeridas para que cualquier estudiante pueda entender matemáticas?” (Duval, 2000, p. 61), en la expone las condiciones cognitivas para que el estudiante pueda resolver tareas que requieran el empleo de al menos dos representaciones. La coordinación de varios sistemas semióticos, es una actividad cognitiva que es fundamental para el entendimiento de la matemática, pues requiere su organización.

Bajo estas condiciones el aprendizaje de la matemática significa integrar en la Arquitectura Cognitiva todos los registros semióticos, así como nuevos sistemas de representación, para su coordinación. Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva, lo cual contribuye a crear y desarrollar habilidades en el estudiante para enfrentar nuevos retos en su formación.

Metodología

Los participantes del estudio fueron 2 grupos de 45 alumnos cada uno del CECyT II “Wilfrido Massieu”, que cursaban la unidad de aprendizaje de cálculo integral y cuyas edades fluctuaban entre los 17 y 18 años. La duración de la experiencia fue de 18 semanas.

Las observaciones se desarrollaron en dos niveles: global y específico. El primer nivel se orientó a registrar los siguientes eventos:

- a) Bitácora del curso. Al término de cada clase el investigador anotaba los hechos más relevantes durante la sesión, posteriormente la información era analizada para la siguiente sesión, en particular, se tenía especial atención a las actividades que presentaron dificultad durante su desarrollo, las cuales se utilizaban como base para la discusión con el grupo.
- b) Grabaciones de las clases, específicamente cuando los equipo exponían su trabajo ante el grupo, para validar sus procedimientos y resultados.
- c) Reportes escritos y tareas extraclase.

A nivel específico la observación se dirigió a examinar con mayor detalle los procesos que lleva a cabo cuando se les solicita enfrentar una situación contextualizada para emplear e identificar el contenido en las diferentes representaciones.

La triangulación de la información se llevó a cabo desde distintas perspectivas para fortalecer la credibilidad en los resultados e interpretación del estudio. Lo anterior se llevó a cabo a través de identificar los hallazgos que se encontraron en la fuente A (reporte escrito individuales), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes escrito de equipos, fuente D (tareas extraclase) y también puedo corroborarse con la fuente E (observaciones en clase), permitiendo comparar información proveniente de diferentes escenarios.

Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4-6 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. Esta dinámica fue implementada durante todo el curso.

Estrategia de Aprendizaje. El diagrama de V de Gowin es un recurso diseñado para ayudar a los alumnos y profesores a captar el significado de los materiales que se van a aprender, es un diagrama que sirve como herramienta para analizar algún trabajo y ver lo más importante del tema. El diagrama V es una herramienta que ayuda a entender y a aprender, éste diagrama muestra que los acontecimientos objetos que serán estudiados, están en el vértice de la V, puesto que se considera que es donde se inicia la producción del conocimiento. Los métodos, estrategias e instrumentos para la implementación de la investigación que posibilitaran la respuesta a las preguntas centrales y la comprensión el acontecimiento estudiado, quedarán expresados en los registros, transformaciones y las afirmaciones de conocimiento. El alumno tiene que evidenciar las estrategias de búsqueda a la solución del problema como son: medios-fin, búsqueda hacia atrás, subtemas, analogías y relaciones, representaciones y ensayo-error. Para que se adquirieran herramientas en la resolución de problemas, se tiene que considerar un dominio teórico (conceptual) que se intenta poner de manifiesto a través de un procedimiento heurístico; V de Gowin (Morales, 1998).

Diseño de las Actividades. Para el diseño de los diferentes contextos simulados se atendieron los significados que incorpora el objeto matemático, además de identificar las habilidades cognitivas, destrezas, y actitudes a desarrollar en las competencias matemáticas. Para ello el contenido de los contextos simulados se presentaron en forma: textual, gráfica, y numérica, atendiendo la interpretación y exploración que el alumno desarrolla durante el proceso, realizando previamente un análisis del contenido matemático a tratar en el curso: lenguaje

algebraico, ecuaciones y funciones, permitiendo el planteamiento de modelos lineales y cuadráticos en contextos simulados.

Tipo de Actividades. Una característica de las actividades fue presentar una situación del mundo real simulada para que el alumno, a través de sus conocimientos previos, explore los conceptos matemáticos nuevos, identificando la información que proporciona la situación para construir la expresión algebraica que modela dicho evento. En particular se expone el desarrollo de un contexto simulado.

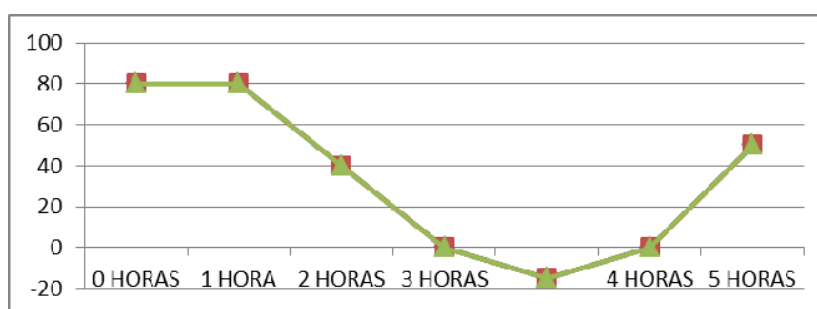


Figura 1. De San Luis a Querétaro

La gráfica muestra la velocidad de un automóvil que se desplaza a lo largo de una carretera rectilínea de San Luis a Querétaro. En el instante cero el automóvil estaba en San Luis.

- ❖ Escribe un párrafo breve que describa lo que el automóvil hizo durante las cinco horas.
- ❖ Traza la gráfica de la distancia que separa al automóvil de San Luis versus el Tiempo durante estas cinco horas.
- ❖ Grafica de la distancia que separa al automóvil de San Luis versus el tiempo durante éstas 5 horas
- ❖ En que instante de las 5 horas estuvo el automóvil más cerca de Querétaro
- ❖ Si la distancia de San Luis a Querétaro es de 202 Km, ¿llega el automóvil a Querétaro en estas cinco horas? Explica.

Análisis de datos

Las siguientes preguntas sirvieron como guía para organizar y analizar la información, permitiendo dirigir la atención a ciertos aspectos del fenómeno que más interesaba observar.

- 1.- ¿Hasta qué punto las actividades diseñadas favorecieron el desarrollo de las competencias matemáticas?
- 2.- ¿Se pueden identificar niveles en las competencias matemáticas desarrolladas durante el proceso de resolución de la situación en los estudiantes?

Los primeros acercamientos del estudiantes se enfocaron a la identificación de la información y entendimiento de la situación a través de dibujos y gráficas, ligados a la percepción intuitiva de la situación. En un segundo momento los alumnos ya habían visualizado la información de la situación, específicamente en la descripción del desplazamiento del automóvil al término de las 3 horas, para interpretar la cuarta hora. El reconocimiento era importante dado que podría colocarse en otra perspectiva al observar y examinar las gráficas, lo que contribuyó al análisis del movimiento del automóvil cuando la velocidad era negativa, hallazgo que benefició reconocer nuevos aspectos y reexaminar la situación original, superando las dificultades que se habían presentado, y así identificar las características, a su juicio, más relevantes en la gráfica. Para ello emplearon tratamientos cuantitativos y cualitativos que permitieron dar sentido a la situación contextualizada y exponer las condiciones para los intervalos que presentó el automóvil durante el recorrido comprendido en las 5 horas, así como las velocidades que experimenta el móvil durante su recorrido.

Durante el proceso aparece entrelazado el seguimiento, es decir surge una idea o conjetura la cual fue discutida, a través de las representaciones, para examinar la situación desde diferentes aspectos, lo que contribuyó al fortalecimiento de sus argumentos durante el análisis de los datos identificados. Información que fue analizada, organizada y sistematizada empleando los conceptos de: integral definida, definición de derivada, y las leyes de Newton para construir el modelo matemático del evento. Es importante mencionar que cuando el estudiante no está familiarizado o no ha explorado el contenido de las representaciones, está clara en desventaja en cuanto a su interpretación y la restricción de los recursos para analizar su contenido y en consecuencia su estructura conceptual se ve limitada. La tabla I muestra los niveles de competencias identificados.

Niveles	Aprendizaje	Descripción
Nivel Cero	Aprender a saber	Conocimientos Aislados
Nivel Uno	Aprender a conocer	Reconoce elementos de cada área y los articula
Nivel Dos	Aprender a hacer	Comunica los hallazgos identificados durante la situación contextualizada
Nivel Tres	Aprende a emprender	Argumenta sus conjeturas en el contexto y expone propuestas sustentadas.
Nivel Cuatro	Aprende a ser	Descontextualiza el problemas para abstraer el concepto matemático

Tabla I

Competencias identificadas fueron: a) Reconoce las gráficas de las distintas funciones, b) Identifica las distintas operaciones con funciones, c) Reconoce la existencia de límites de funciones, d) Aplica correctamente el procedimiento para el trazado de gráficas de funciones, e) Interpreta la información gráfica, f) Resuelve situaciones problemáticas utilizando propiedades y conceptos matemáticos estudiados, g) Interpreta y Define funciones que modelen situaciones problemáticas, h) Elabora correctamente ejemplos y contraejemplos, l) Obtiene resultados razonables en situaciones problemáticas, J) Expresa conceptos en distintos lenguajes (coloquial, gráfico, algebraico, K) Elabora correctamente gráficas considerando determinadas condiciones.

Conclusiones

- ❖ En la fase inicial de la experiencia, se manifestaron dos patrones: la visión calculista y la cualitativa. La primera persistió en las primeras actividades, sin embargo, a medida que los estudiantes trabajaban en las diferentes tareas se notó un cambio hacia la atención de los aspectos cualitativos.
- ❖ Algunos estudiantes no trascendieron el nivel aritmético en el seguimiento de la situación.
- ❖ El uso de múltiples representaciones favoreció al estudiante en la identificación de las relaciones matemáticas y en la conexión de la información.
- ❖ Al parecer, las mayores dificultades de los alumnos radica en la expresión de conceptos en distintos lenguajes, la resolución de situaciones problemáticas utilizando propiedades y conceptos ya estudiados y en la aplicación de algunos conceptos y procedimientos.
- ❖ La manera en que se organizaron las actividades en el curso, es decir, trabajo en equipo, exposiciones y discusión grupal, fue un escenario importante para el desarrollo de las competencias matemáticas, favoreciendo la atención a las relaciones matemáticas de la situación contextualizada, la conexión de información, el uso de diferentes representaciones y el empleo de un lenguaje preciso para expresar las ideas matemáticas.
- ❖ Impulsar las competencias matemáticas dota al estudiante de oportunidades para realizar prácticas que ligan los conceptos teóricos con la práctica profesional en el contexto que le rodea.

Agradecimiento. La autora agradece el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado a través de las investigaciones con números de registro; 20100459 y 20110397.

Referencias bibliográficas

- Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa, Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas Editores.
- Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: Visión y acción. (sf). Recuperado el 13 de mayo de 2012 de http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.html
- Duval, R. (2000), Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. I, 55-69, Japan.
- Garder, H. (1999). *La Educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas*. Barcelona, España: Paidós.
- Goldin, G. y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, and B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 987-439), Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. (1991) Notations and Representations as Mediators of Construct Live Processes. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education*, 53-74. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Kaput, J. (1993). The Urgent Need for Proleptic Research in the Representation of Quantitative Relationships. In T. Romberg, E. Fennema y T. Carpenter (Eds.). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*, 279-311. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J., Noss, R. y Hoyles, C. (2002). Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computation era. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 51-75). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Morales, E. (1998). Efectos de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de 9° grado de educación básica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(2), 77-91.
- Parnafes, O. & diSessa, A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning*: 9, 251-280.
- Perkins, M. (1999). ¿Qué es la comprensión?. En M. Stone (Comp), *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 2-7), Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Wiske, M. (1999). ¿Qué es la enseñanza para la comprensión?. En M. Stone (Comp). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 14-27), Buenos Aires, Argentina: Paidós.