EFICACIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE INGENIERIA

Alvaro Encinas, Ramiro Ávila, Maximiliano De Las Fuentes
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
aencinasb@uabc.edu.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx

Resumen. Se presenta un estudio sobre la eficacia que muestran estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de optimización. Se seleccionaron y se aplicaron a estudiantes de ingeniería de una universidad del noroeste de México, problemas con enunciado del texto escolar que se utiliza en la clase de Cálculo. Escribieron sus respuestas y se les solicitó externaran en voz alta sus pensamientos, mismos que fueron grabados y transcritos. El análisis tanto de la práctica escrita como de la transcripción se llevó a cabo mediante herramientas suministradas por el Enfoque Ontológico-Semiótico y algunos elementos de Metacognición. Los hallazgos sugieren que para tener eficacia en la resolución de problemas matemáticos en optimización se requiere tener una adecuada comprensión de los objetos intervinientes y una buena gestión metacognitiva del proceso de resolución.

Palabras clave: eficacia, optimización, resolución de problemas

Abstract. This is a study about the effectiveness in optimization problems solving showed by engineering students from a university of northwestern Mexico. There were selected word problems from the textbook used in calculus class. Students were asked to wrote down their answers and simultaneously, express their thoughts aloud while they were working. This was recorded and transcribed. The analysis of both the written practical and transcription was performed using tools provided by the onto-semiotic approach and some elements of metacognition. The findings suggest that adequate understanding of the objects involved and good management metacognitive resolution process are required to reach effectiveness in the optimization problems solving.

Key words: efectiveness, optimization, problem solving

Introducción

Todos los seres humanos enfrentamos problemas, algunos triviales o de fácil solución que pueden ser resueltos en poco tiempo y sin gran tensión emocional e intelectual; otros no tanto, como conseguir un buen empleo. Cuando nos enfrentamos a problemas complejos, entramos en un estado psicológico de conflicto, tanto cognitivo como emocional, que intensifica nuestra actividad intelectual en busca de encontrar alguna manera de resolverlos; estos problemas pueden ser de índole personal, escolar, de carácter laboral, profesional, etc.

Optimizar (Malaspina, 2007; Malaspina y Font, 2010) es una actividad frecuente en diversas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, al viajar en nuestro automóvil queremos llegar a algún lugar en el menor tiempo posible. Consideramos que optimizar debe ser un rasgo característico de las soluciones que un ingeniero da a los problemas que aborda; por ejemplo, el ingeniero civil al construir una obra buscará que la construcción optimice espacios, materiales, tiempo, recursos financieros, etc. En general, se asume que un ingeniero, al resolver problemas de su profesión, lo hace tratando de obtener la solución óptima, de ahí que, en más de un curso de los que estudia un ingeniero en su paso por la escuela, aborde este tipo de problemas. Para llevar a cabo este estudio hemos acotado a un sólo tipo de problemas, los denominados problemas de optimización.

En el presente reporte presentamos los resultados de una investigación encaminada a identificar los factores que influyen para que un estudiante de ingeniería sea eficaz en la resolución de problemas escolares. Entendemos por sujeto eficaz aquél que logra hacer efectivo un propósito (Diccionario Océano, 2007), en este caso resolver un problema.

Se presenta un estudio sobre las prácticas matemáticas efectuadas por estudiantes de ingeniería al pretender resolver problemas de optimización y de allí identificar elementos que hacen a los estudiantes eficaces o no. La investigación la desarrollamos conscientes de que existen diversos estudios sobre el proceso de resolución de problemas, por ejemplo (Santos, 2008; Schoenfeld, 2007), pero a la vez convencidos de que dicho proceso aún no está suficientemente comprendido.

El propósito de esta investigación es contribuir a la mejora de la comprensión de los procesos a través de los cuales los estudiantes resuelven problemas matemáticos.

Referentes teóricos

En este trabajo, se propone y se aplica una herramienta de análisis sobre las prácticas de los estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas escolares de optimización. Está compuesta por la identificación de los objetos matemáticos intervinientes, los procesos matemáticos involucrados y procesos metacognitivos del resolutor del problema. En seguida se presentan los elementos teóricos involucrados.

Las herramientas son proporcionadas principalmente por el Enfoque Ontológico Semiótico (EOS) (Font y Rubio, 2008; Font, Planas y Godino, 2010; Godino, 2003), y por otros referentes teóricos relacionados con la Metacognición (Flavell y Wellman, 1977; González, 1999; Gusmao, Font y Cajaraville, 2009).

El conjunto de actividades realizadas por un *sujeto* para resolver un problema constituye un *sistema de prácticas*. De los sistemas de prácticas que un sujeto (persona) utiliza para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas emergen los *objetos matemáticos* (personales). Dichos sistemas de prácticas constituyen los significados que ese sujeto tiene de tales objetos.

La actividad matemática tiene su origen o razón de ser en las *situaciones problémicas* consideradas como objetos matemáticos. Los restantes objetos se representan a través del *lenguaje*; los *argumentos* justifican los *procedimientos* y *proposiciones* que relacionan los *conceptos* entre sí. A su vez, estos objetos se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales y teorías, entre otras.

Para llevar a cabo el análisis de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de objetos matemáticos primarios mencionadas en el párrafo anterior ya que resultan de mucha utilidad para identificar, entender y valorar los procesos que se desarrollan al resolver los problemas. La noción de *sistema de prácticas* es útil para analizar los procesos de resolución de problemas, ya que permite percibir y caracterizar la forma particular que adoptan los objetos matemáticos al ser utilizados en distintos contextos.

Interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación (Font y Rubio, 2008).

La resolución de problemas puede ser considerada como un "megaproceso" matemático ya que implica configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios tales como el establecimiento de conexiones entre los objetos y la generalización de técnicas, reglas y justificaciones.

La realización efectiva de los procesos de resolución de problemas requiere, además, la ejecución de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos metacognitivos. Las habilidades metacognitivas son requeridas para la regulación de los procesos cognitivos e incluyen la comprensión del enunciado del problema escolar que guiará el desarrollo de acciones posteriores; la selección y planeación de estrategias para abordarlo que depende fuertemente del tipo de conocimientos y procedimientos matemáticos al alcance del estudiante; la supervisión o monitoreo del progreso de la resolución; la regulación o control del procedimiento para ver si se ha desviado del plan trazado de resolución y la evaluación o verificación de la respuesta, se consideran habilidades o gestión metacognitiva.

Metodología

Para conocer sobre el desempeño de estudiantes de ingeniería al pretender resolver problemas de optimización y así cumplir con el objetivo de esta investigación, se diseñó y siguió la siguiente metodología: Primero se seleccionaron problemas de optimización de los libros de texto usados por los profesores en sus cursos de Cálculo (Larson, Hostetler y

Edwards, 2006; Leithold, 1998; Stewart, 2001). Problemas con enunciado considerados como pertenecientes al grupo de reproducción (OCDE-INECSE, 2004) y de acuerdo a la clasificación de Font (2007) a problemas escolares de contexto evocado de consolidación. Estos problemas se escogieron utilizando dos criterios: que correspondieran a diferentes contextos extra-matemáticos y que se modelaran con diferentes tipos de funciones elementales.

Era de interés que los estudiantes que resolverían los problemas satisficieran varios criterios, particularmente que comprendieran la noción de optimización de entre un grupo de alumnos del primer semestre de ingeniería de una universidad del noroeste de México. Se seleccionaron los diez que: a) resultaron mejor evaluados en tres exámenes de conocimientos previos sobre optimización que se les aplicaron, b) que recibieron el aval de su profesor de Cálculo y c) que aceptaron participar en la investigación. Además participaron tres estudiantes exitosos de tercer semestre.

Para la toma de datos utilizamos un procedimiento en la que los problemas se aplicaron a cada estudiante aislado en un cubículo, al que previamente le solicitamos que cuanto hiciera lo escribiera en unas hojas de papel que se le proporcionaron para ello y también se le pidió que externara en voz alta y en forma simultánea al proceso de resolución, sus pensamientos, mismos que fueron grabados y posteriormente transcritos.

El análisis de los datos recabados fue efectuado en dos etapas. En la primera, fueron examinados los 13 paquetes de hojas de respuestas escritas por los estudiantes con el fin de resolver el problema. Utilizando la clasificación de Objetos Matemáticos del EOS, se identificaron los objetos intervinientes en la práctica del estudiante; posteriormente, pero todavía dentro de esta primera etapa, se identificaron los procesos matemáticos involucrados. Este proceso de análisis se hizo con base utilizando la metodología propuesta en el EOS.

En una segunda etapa, se revisaron las 13 transcripciones recabadas poniendo especial cuidado en identificar los diversos elementos de la gestión metacognitiva, así como el nivel de conciencia que el estudiante tiene de dicha gestión, registrando con precisión los tiempos de avance del proceso.

Resultados y su análisis

Se presenta el caso del alumno H para ilustrar el tipo de análisis realizado. El problema que se le aplicó está planteado en un contexto geométrico e involucra en su resolución una función de tipo radical. Su enunciado es: "Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste”.

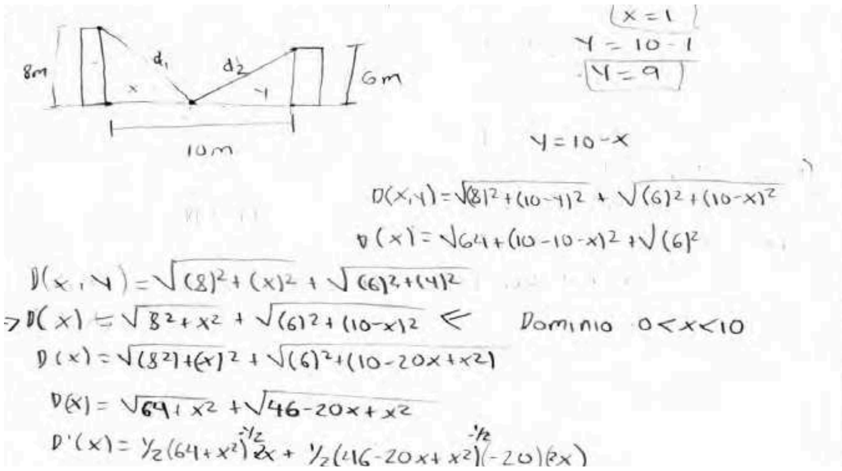

Figura 1. Sección de la respuesta escrita del alumno H.

La Figura 1 muestra una sección de la respuesta escrita del alumno H, sobre la cual se estudian los objetos y procesos involucrados en la resolución del problema.

Los objetos matemáticos más relevantes identificados en la respuesta son:

- Lenguaje:
  - Verbal: términos precisos: longitud, distancia, opuesto, adyacente, hipotenusa.
  - Gráfico: dibujó un poste de altura 8 m y de su punta sale un cable hacia un punto situado a una distancia *x* del poste izquierdo y de allí hacia la punta del poste de 6 m.
  - Simbólico: d_1,d_2, x, y, D(x, y) , D(x), D`(x)
- Conceptos explícitos: longitud, triángulo rectángulo, dominio, función y derivada.
- Procedimientos explícitos: simplificación de una expresión radical, derivación de una función radical, despeje de x.
- Proposiciones explícitas: teorema de Pitágoras. Implícitas: la longitud es aditiva.
- Argumentos: existe una longitud mínima del cable. La longitud del cable que une las puntas de los postes toca un punto entre las bases.

En este ejemplo, se identifican algunos errores en la sección de la respuesta tanto de tipo algebraico como de definición del dominio de la función, etc. de lo cual se decidió no puntualizar por razones de espacio.

Los procesos más relevantes identificados en la práctica del alumno H, son:

Un proceso de comunicación: en el sentido de que "entiende enunciados matemáticos de otras personas"; proceso de significación: entiende el significado del enunciado del problema y de los términos que aparecen; proceso de comunicación: en el sentido de que "produce un texto como respuesta"; y un proceso de materialización: realiza una representación ostensiva de los dos postes situados a 10 m entre sí en las bases. Su proceso de argumentación se basó en:1) un proceso de significación, supone que el cable llega a una distancia *x* entre las bases de los postes, 2) tres procesos de enunciación, la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de los catetos; la longitud total del cable es igual a la suma de las longitudes de las hipotenusas; y desecha $x = -2$ ya que está fuera del dominio, 3) dos procesos de algoritmización, manipulación algebraica transformando D(x, y) en D(x), obtiene D'(x), iguala a cero, simplifica y despeja *x* obteniendo $x = 1$ y $x = -2$; y la realización de cálculos numéricos.

A continuación se presenta un tramo de la transcripción, a partir del minuto 00:50, para ilustrar lo pensado en voz alta por el alumno H:

00:50, Ok, comenzamos leyendo el problema: paso 1: leer el problema en voz alta: dos postes con las longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso, es decir parados como usualmente están los postes; con bases separadas a una distancia de 10 metros, calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste, es decir… paso 2: comprender el problema, la parte difícil… dos postes con longitudes de 6 y 8 metros... lados distintos… se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de 10 metros, calcule la longitud mínima, es optimización obtención de un mínimo de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes, no especifica cuál puede ser el de 6 o puede ser el de 8… hasta un punto en el suelo entre los postes, un punto en el suelo y luego hasta la punta del otro poste… como va de la punta a la punta del otro poste no importa por cual se empiece lo importante es en cuál punto del suelo se va a poner el cable, ¡ah! prosigue hacer una gráfica que es lo más conveniente y ayuda bastante, tenemos un poste mal dibujado por cierto... de 8 metros, tenemos un poste de 6 metros ok… poste de 6 metros y sus bases están separadas por una distancia de 10

> metros,... diez metros, lo que se pretende es obtener distancia mínima vamos a bautizar a nuestra variable como *d*, muy bien… muy bien…

En la transcripción se identificaron, procesos metacognitivos tales como *comprender el enunciado del problema*, *elaborar un plan o estrategia*, *supervisar el desarrollo del plan*, *controlarlo y evaluar el resultado obtenido*. El alumno H, reconoció que se trataba de un problema de optimización. Se centró en el punto de llegada del cable y de las magnitudes variables correspondientes. Las relacionó y construyó la función. La derivó, igualó a cero y propuso una solución.

Caso general

El análisis del desempeño de los estudiantes participantes en la investigación permite afirmar que existe una estrecha relación entre las significaciones que se tienen de los objetos y procesos matemáticos intervinientes, el nivel de desarrollo de las habilidades intelectuales que se ponen en juego al desarrollar tanto los procesos matemáticos como los metacognitivos, así como las actitudes que se muestran al estar tratando de resolver el problema y el nivel de eficacia del alumno resolutor.

Se ha hallado que los estudiantes examinados muestran ser poco eficaces cuando pretenden resolver un problema de optimización de manera independiente. Este bajo nivel se observa en cada una de las etapas del proceso, así como en el desarrollo de cada uno de los subprocesos como son: *modelar*, *planear*, *supervisar*, *regular* y *verificar*. La excepción se observa en la etapa del procedimiento algebraico el cual es ejecutado de manera más eficaz.

Para los estudiantes, el principal obstáculo se presenta en el proceso de construcción de la función que modela matemáticamente el problema, específicamente, en la identificación de las magnitudes que varían y las relaciones entre ellas. Los estudiantes que logran obtener la función dan muestra de un buen dominio de los procesos algorítmicos para ejecutar lo planeado.

El diálogo que el investigador entabló con cada estudiante, después de que éste manifestaba haber terminado de resolver el problema, permitió observar que es factible desencadenar en él, un proceso de valoración de la manera en que procedió, a la vez que evocar, rápidamente, conocimientos y estrategias más eficaces para avanzar en la resolución del problema. Se detectó que una buena gestión metacognitiva requiere, entre otras características, que el resolutor no pierda de vista lo que conoce, lo que desconoce y el punto donde se encuentra; también se pudo establecer la importancia de las actitudes como elemento de la competencia, entre las que destacan la disposición a enfrentar el reto que representa el problema y la tenacidad para tratar de resolverlo.

Consideraciones finales

Se ha encontrado que los estudiantes de ingeniería de la universidad del noroeste de México seleccionados bajo los criterios arriba descritos, muestran poca eficacia en el proceso de resolución de problemas de optimización especialmente en la etapa inicial.

El análisis de las transcripciones muestra que los estudiantes más eficaces en la resolución del problema no sólo tienen un buen nivel de comprensión de los objetos y procesos matemáticos, sino también de los procesos metacognitivos ya enumerados. A partir de esto, se ha considerado que mejorar la eficacia de los estudiantes en la resolución de problemas requiere atender de mejor manera los procesos metacognitivos en el proceso de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Flavell, J. y Wellman, H. (1977). Metamemory. En Kail y Hagran (Eds.). *Perspectives on the the development of memory and cognition* (pp. 3-33), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La gaceta de la RSME, 10*(2), 419-434.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Font, V. y Rubio, N. (2008). Ontho-semiotic tools for the analysis of our practice. En B. Czarnocha (Ed.). *Handbook of mathematics teaching Research: Teaching Experiment*, (pp. 165-180), Krakow: University of Rzeszow.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Manuscrito no publicado Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado en abril de 2007 de: URL:http//www.ugr.es/local/jgodino.

González, F. (1999). Los procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 43-44, 199-208.

Gusmao, T., Font, V. y Cajaraville, J. (2009). Análises cognitivo e metacognitivo de prácticas de resolução de problemas. *Educação Matematica Pesquisa,* 11(1), 8-43.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo.* México: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* México, D.F: Oxford University Press.

Malaspina, U. (2007). Intuición, Rigor y Resolución de Problemas de Optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10 (3), 365- 399.

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 107-130.

Océano Práctico Diccionario (2007). Cd. México: Ed. Océano de México.

OCDE-INECSE. (2004). Marcos Teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas. Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web: http//www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf.

Santos Trigo, L.M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-187). Badajoz, España.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM- The International journal on Mathematics Education*, 39, 537-551.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable.* Bogotá: Thomson-Learning.