

## ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA PISA. UN ESTUDIO DE CASOS

Florida Pastrana, Guadalupe Cabañas-Sánchez  
Universidad Autónoma de Guerrero  
flor\_jua\_10@hotmail.com,gcabanas.sanchez@gmail.com

México

**Resumen.** El artículo analiza las estrategias desarrolladas por estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA. El estudio toma como base las explicaciones escritas, verbales y gestuales presentadas por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas. Fueron caracterizadas dos tipos de estrategias: formales e informales. Las primeras, a partir de conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas y las segundas, por medio de transformaciones como la descomposición y recomposición de formas geométricas, asimismo, del uso de la estimación visual y estimación de medidas.

**Palabras clave:** estrategias formales e informales, problemas, prueba PISA

**Abstract.** This article analyzes the developed strategies by High School students while solving PISA mathematical problems. The study is based on the written, verbal and gestural explanations given by the students in the process of solving problems. Two types of strategies were characterized: formal and informal. The first one, from the use of concepts on objects, relations and operations, as well as propositions and mathematical properties and the second one, through the transformations, such as the decomposition and alteration of geometric forms, in addition, to the visual estimation and estimation of measurements.

**Key words:** formal and informal strategies, problems, PISA test

### Introducción

Varias investigaciones se han ocupado por explorar las estrategias desarrolladas por los estudiantes en distintas etapas de su formación, mientras resuelven problemas matemáticos (e.gr., Cobb, Yackel, & Wood, 1992; Mónaco & Aguirre, 1996; Campistrous & Rizo, 1999; Olave, 2005; Pastrana & Cabañas-Sánchez, 2012). Las principales conclusiones de estas investigaciones, es que el pensamiento matemático está caracterizado por la variabilidad, pues los estudiantes tienden a aplicar diferentes estrategias incluso ante un mismo problema (Kospentaris, Spyrou & Lappas, 2011), independientemente si arriban a una respuesta o si esta cumple con las exigencias (Pastrana & Cabañas-Sánchez, 2012). El estudio de las estrategias cobra importancia, por el interés de reconocer los conocimientos que usan los estudiantes, de la calidad y cantidad de ese conocimiento y cómo lo usan ante situaciones diversas, ello con el fin de mejorar procesos de enseñanza.

El presente artículo reporta resultados de un estudio relacionado con estrategias que emplean estudiantes de bachillerato, mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA. El interés por explorar las estrategias ante este tipo de problemas, radica por un lado, por los cuestionamientos realizados a cerca del desempeño de los estudiantes, especialmente los que atañen al área de matemáticas, por otro, a fin de ofrecer evidencia empírica sobre procesos

de aprendizaje de los estudiantes, ya que como afirma Díaz-Barriga (Díaz-Barriga, 2006) los resultados obtenidos en las pruebas masivas, ocultan el problema de fondo: el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Para llevar adelante este trabajo, nos planteamos la pregunta siguiente: *¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes de Nivel Medio Superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA?*

### Elementos teóricos

Los sustentos teóricos de esta investigación son los conceptos *estrategia*, *problema* y *resolución de problema*, los cuales nos permitieron analizar y explicar los resultados obtenidos. Estrategia la entendemos en el sentido de Escoriza (2003), quien manifiesta que son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos. Además de su definición, destaca algunas características en torno a las estrategias, y considera que al momento de la lectura, en este caso de un problema son esenciales aspectos como las características del lector: la cantidad, la calidad y diversidad de lo que sabe. Desde nuestra perspectiva, consideramos que estos aspectos contribuyen a una interpretación adecuada de un problema, asimismo, en la elección de las estrategias a desarrollar en el proceso de resolución. El concepto de problema lo retomamos de Campistrous y Rizo (1999), quienes lo conciben como a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. Y resolución de problemas tomamos en consideración a Polya (1965), quien identifica en dicho proceso 4 etapas: *Comprender el problema*, *Configurar un plan*, *Ejecutar un plan* y *Visión retrospectiva*.

Para la caracterización de las estrategias se hizo una adaptación a la propuesta de Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011). De este modo, las caracterizamos como:

- ❖ *Estrategias formales*: Consisten del uso de conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas.
- ❖ *Estrategias informales*: Consisten de transformaciones basadas en la descomposición y recomposición de formas geométricas (cortar y pegar), la estimación visual y estimación de medidas.

### Aspectos metodológicos

La investigación se inscribe en un estudio de casos como método para profundizar comprender los procesos desarrollados por los estudiantes durante la resolución de los problemas.

La población consistió de seis estudiantes de primer año de bachillerato, cuyas edades oscilaban entre los 15 años, tres meses y 16 años, dos meses, rango de edad considerada por la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico) en la aplicación de la prueba PISA. Esta población se localiza en tercer año de secundaria y en primer año de bachillerato. De los participantes, cuatro estaban matriculados en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) y los otros dos, en el Centro de Estudios Tecnológicos y de Servicios No. 135 (Cetis 135), ambos centros educativos, se ubican en la ciudad de Chilpancingo, Gro.

Nos apoyamos de dos instrumentos para la recolección de evidencias: problemas matemáticos de la prueba PISA 2003 y una entrevista. Se aplicaron cuatro problemas de PISA 2003: el de carpintero, el de Juventud crece más, Exportaciones y el de Selección, cada uno se ubica en un contenido diferente según los criterios de PISA. Los problemas se resolvieron de manera individual, en un ambiente de lápiz y papel en un tiempo promedio de 40 minutos. La entrevista fue de tipo abierto y tuvo como fin indagar de manera más profunda los procesos que siguieron los estudiantes en la resolución de los problemas. Las preguntas que la guiaron fueron las siguientes:

1. ¿Tenías un plan o una idea inicial para resolver el problema?
2. ¿Qué se pide?
3. ¿Cómo lo resolviste?
4. ¿Cuál o cuáles son las respuestas al problema?
5. ¿Consideras que tu respuesta sea realmente la solución al problema?
6. ¿Crees que haya otra forma de resolverlo?

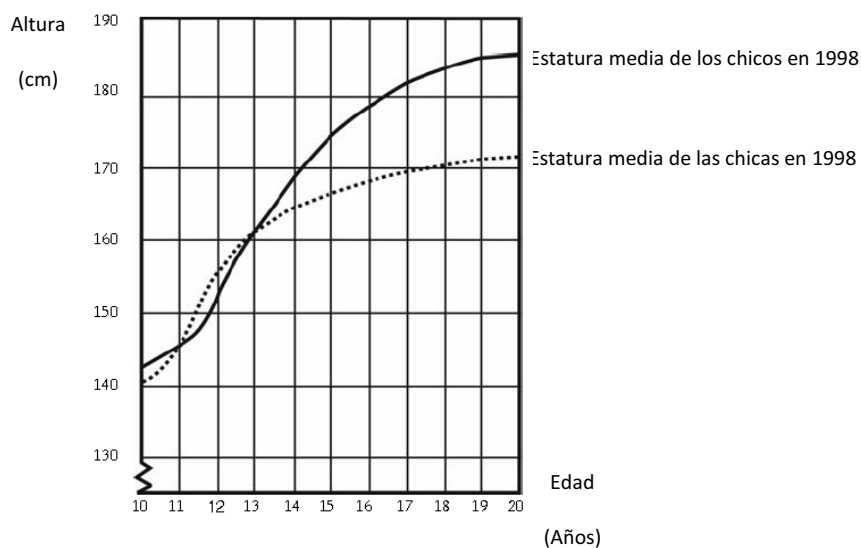
### Estudio de casos

Por cuestiones de espacio, presentamos un caso, el de Nadxieli, quien resolvió un problema, conocido como el problema de Juventud Crece más.

#### *Juventud crece más*

En la siguiente gráfica se representa la altura promedio de los jóvenes, hombres y mujeres en los Países Bajos para 1998.

- a) Desde 1980, la altura promedio de las mujeres de 20 años de edad se ha incrementado en 2.3 cm hasta llegar a 170.6 cm. ¿Cuál era la altura promedio de la mujer de 20 años en 1980?, Argumenta tu respuesta.
- b) Explica cómo es que la gráfica muestra que el crecimiento promedio de las niñas es más lento después de los 12 años de edad. Argumenta tu respuesta.
- c) De acuerdo con la gráfica, en promedio, ¿Durante qué periodo de su vida las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad?, Argumenta tu respuesta.



Este problema tiene tres respuestas, la primera es cerrada y el resto, abiertas. Corresponde al contenido de cambio y relaciones, y pertenece al contexto científico. Esta situación trata del crecimiento promedio que alcanzan los jóvenes de una región del mundo, en un determinado período de tiempo. Los datos se reportan a través de dos gráficas, ubicadas en un mismo plano. Una de ellas, representa la estatura de los hombres y la otra, de las mujeres. Para responder a la pregunta del inciso a, es suficiente con realizar una resta. Para responder a las preguntas de los incisos b y c, se requiere de la lectura e interpretación de las gráficas, seguidamente comparar las estaturas alcanzadas en determinada edad.

#### El Caso de Nadxieli

Nadxieli tiene 15 años, un mes y cursa el segundo semestre de bachillerato tecnológico en el Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios 135.

#### a) ¿Cómo resolvió el problema?

La primera acción que realizó consistió en leer el enunciado del problema. Por la lectura, se da cuenta que para responder a la pregunta del inciso a, puede restar a la estatura alcanzada por las mujeres en cierto período, el incremento que tuvieron desde 1980 (renglones 108 y 120); de ese modo, determina cuánto medían en ese año (Figura 1).

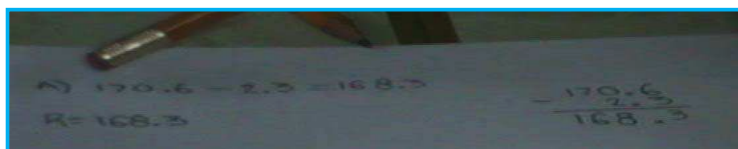


Figura 1. Nadxieli realiza la operación.

Entrevistador: ¿En qué te basaste para resolver el problema?

Nadxieli: Hice *una resta*... utilicé la altura... que nos daba de 170.6 cm... entonces este número le resté los 2.3 que habían incrementado desde 1980 .... Aquí dice desde 1980, la estatura de las mujeres ha incrementado 2.3 hasta llegar hasta 170.6 cm. Entonces como dice la pregunta ¿Cuál era la altura promedio de las mujeres de 20 años en 1980?... entonces... *a 170.6 le resto 2.3* para que me de la estatura en la que estaba en 1980...

Para responder a la pregunta del inciso b, hace una lectura de la gráfica. De las acciones posteriores, se infiere que utiliza la noción de razón cambio, ya que compara cómo se comporta la variable altura respecto de la variable edad (razones de cambio de la altura respecto del tiempo en años), y además, porque se da cuenta que el incremento de la estatura de las mujeres en dos períodos distintos, es el mismo. Ello, porque en dos años crece 16 cm y en otro período de 8 años también crece 16 cm (Figura 2 y renglones 126-134). En esto se basa para explicar el crecimiento lento de las mujeres después de los 12 años.

Entrevistador: ¿La gráfica por qué te dice que crece o es más lento? ¿Cómo es que te dice la gráfica?

Nadxieli: Nos muestra que las mujeres de los 12 a los 20 años, va más lento, porque de 10 años a los 20 años avanza 16 cm, y de 10 a 12 años 16 cm también...

Entrevistador: ¿Qué quiere decir eso?

Nadxieli: Que de ahí las mujeres crecen más rápido, hasta los 12 años... porque aumentan 16 cm, pero de los 12 a los 20 años aumenta 16 también...

Entrevistador: ¿Eso qué significa?

Nadxieli: Avanzarían más lento...

Entrevistador: ¿De 12 a 20 que hay?

Nadxieli: ... para las mujeres es más lento el crecimiento.

Entrevistador: Tú dices que 10 a 12 crecen 16 más o menos... ¿Qué significa eso?

Nadxieli: *Que son 2 años los que avanzan, y de 12 a 20 son 8 años los que avanzan y avanzan lo mismo...*

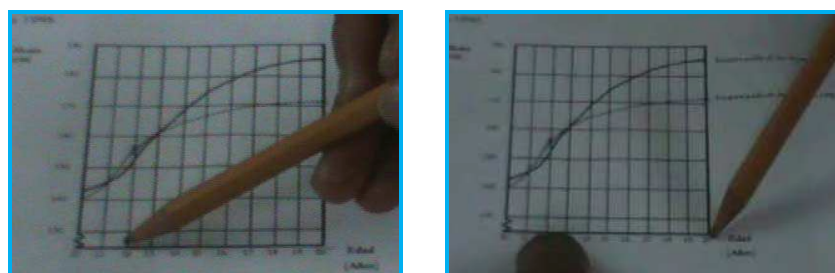


Figura 2. Comparación de las razones de cambio de la altura respecto al tiempo

Su respuesta a la pregunta del inciso c también se sustenta de la interpretación de la gráfica. Al explorar el período en donde las mujeres son más altas que los hombres, reconoce que se da entre los 11 y 13 años. En ese proceso, compara las estaturas a partir de las medidas que infiere de las gráficas (Figura 3); es así que sostiene que los hombres a los 12 años son más bajitos que las mujeres (renglón 138). Ante la pregunta de qué significado le da al punto donde se cortan las gráficas, afirma que es donde las mujeres y los hombres tienen la misma estatura (renglones 138 y 140), incluso, lo señala (Figura 3).

Nadxieli: De acuerdo con la gráfica, en promedio... durante qué período de su vida las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad... aquí cuando las mujeres tienen 12 años ... yo le puse ... 156 cm, y los hombres ... los hombres ... son más bajitos... las mujeres son más altas que los hombres, ¿por qué?... porque la mujeres miden como 156 cm y los hombres están midiendo como 153 cm cuando tienen 12 años... desde los 11, el hombre casi no crece y como nos muestra la gráfica, de los 11 el hombre casi no crece hasta los 13. Y las mujeres de los 11 a los 13 están más altas que los hombres...

Entrevistador: Y ese punto donde se junta, ¿Qué significa?

Nadxieli: Que los hombres con las mujeres son de la misma estatura.

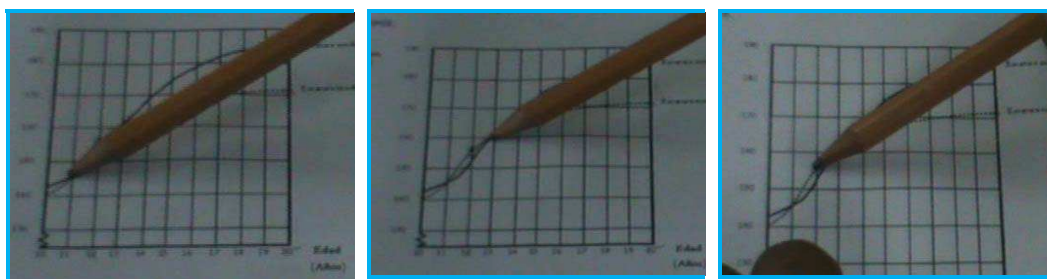


Figura 3. Período donde las mujeres son más altas que los hombres.

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Nadxieli controla la situación en distintos momentos del proceso de solución. Por ejemplo, sabe cuál de las gráficas representa la estatura de los hombres y cuál la de las mujeres. Las acciones que realiza están mediadas por su conocimiento sobre:

- ❖ *La lectura e interpretación de datos de gráficas.* Ejemplo de ello, identifica que el punto donde se cortan las gráficas, tanto los hombres como las mujeres tienen la misma estatura.
- ❖ *Las operaciones que debe usar en proceso de solución del problema,* por ejemplo, la sabe que tiene que utilizar la resta para determinar la estatura inicial después de haber incrementado cierta cantidad.

c) *Síntesis*

Nadxieli hace una adecuada interpretación del problema y sabe que para resolverlo debe apoyarse de las gráficas. Las acciones que realiza tienen el siguiente orden:

1. Lee e interpreta el enunciado del problema y el cuestionamiento del inciso A.
2. Identifica datos en el enunciado.
3. Elige a la resta como la operación que debe utilizar y la realiza.
4. Lee el cuestionamiento del inciso B.
5. Hace una lectura de los datos en la gráfica, por ejemplo, dice “que cuando tiene 20 años tiene una altura promedio 170.6”
6. Compara varias razones de cambio de la altura respecto del tiempo, porque dice “que crece 16 cm de los 10-12 años y lo mismo crece de los 12 -20, infiriendo que aumente aproximadamente la misma longitud, pero una en 2 años y otro en 8 años.
7. Lee el cuestionamiento del inciso C.
8. Ubica los extremos del intervalo donde las mujeres son más altas que los hombres, dice “que en sus extremos sus alturas son iguales”
9. Compara las alturas de las mujeres y hombres cuando tienen 12 años.

Se observa que las explicaciones de Nadxieli se ubican tanto en el contexto discreto como en el continuo; el discreto, al momento que compara las estaturas, y el continuo, cuando determina el período donde las mujeres son más altas que los hombres. Una estrategia es la que predomina en sus acciones: la comparación de razones de cambio a partir de la lectura de gráficas.

### Reflexiones finales

En el proceso de resolución de un problema reconocemos que intervienen aspectos como los siguientes: a) Una comprensión adecuada del problema; b) La cantidad, calidad y diversidad de los conocimientos que posee quien resuelve el problema; c) Cómo aplica sus conocimientos para resolver un problema, y; d) Las estrategias que desarrolla en el proceso de resolución de un problema. El análisis de las estrategias permitió reconocer una variabilidad en el pensamiento de los estudiantes, asimismo da cuenta de que las estrategias dependen de la cantidad, calidad y diversidad de los conocimientos que posee los estudiantes, del tipo de situaciones que se plantean y del contexto.

El análisis evidencia que la comparación es una de las estrategias que prevalece en las acciones de los estudiantes, en este caso de Nadxieli. Y por la forma de proceder, se ubica en el tipo formales, ya que hace uso de la comparación del comportamiento de razones de cambio de la altura (estatura de personas) respecto del tiempo (en años). Esta comparación es resultado de la lectura e interpretación de las gráficas en las que se representan los datos.

### Referencias bibliográficas

- Campistrous, L. & Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2 (3), 31-45.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (2-33). doi:10.2307/749161.
- Díaz-Barriga, A. (2006). El enfoque de competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles Educativos* 23 (111), 7-36.
- Escoriza, J. (2003). *Evaluación del conocimiento de las estrategias de comprensión lectora*. España: Edicions Universitat, Pp. 15-17.
- Kospentaris, G., Spyrou, P. & Lappas, P. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics* 77 (1), 105-127.
- Mónaco, B. y Aguirre, M. (1996). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico: Un estudio de casos*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional. México.



Pastrana, F. & Cabañas-Sánchez, G. (2012). Estrategias en la resolución de problemas planteados en la prueba PISA. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp.160-167). México: Red de Centros de investigación en Matemática Educativa, A.C.

Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas: México.