

PENDIENTE DE LA RECTA EN EL PLANO: ANTECEDENTES PARA SU ENSEÑANZA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Ignacio Garnica y Dovala
Instituto Politécnico Nacional, DME Cinvestav
rmartinezga@ipn.mx, igarnica@cinvestav.mx

México

Resumen. Con el propósito de reconocer los conocimientos adquiridos y requeridos para el curso del álgebra en el 1^{er} semestre del bachillerato tecnológico, de manera conjunta entre dos instituciones se realizaron actividades simultáneas de indagación e investigación en condiciones de tiempo real de enseñanza en el aula, con base en la propuesta institucional de enseñanza del bachillerato. Se eligió el tema de la pendiente de la recta en el plano, se aplicaron tres cuestionarios dos de ellos relacionados con las preguntas de indagación y el tercero con las de investigación. Se instrumentó una estrategia de enseñanza del tema en foco que siguió la propuesta de dos libros de texto (Butts, Phillips y Shaughnessy, 2005;AM-DEMS-SA-IPN, 2004). Al término de la instrumentación de la estrategia y como resultado de los análisis correspondientes se aplicaron tres entrevistas. Se reportan los resultados de los dos procesos.

Palabras clave: funciones y ecuaciones lineales

Abstract. In order to recognize the knowledge acquired and required for the course of algebra in the 1st semester of the technical high school, jointly by two institutions were conducted simultaneous activities of inquiry and research in real-time conditions of classroom teaching, based in the institutional proposal baccalaureate education. The topic was chosen of the slope of the line in the plane. Were applied three questionnaires, two of them related to the questions of inquiry and the third with the research. Was implemented a strategy of teaching for the main topic that followed the proposal of two textbooks (Butts, Phillips y Shaughnessy, 2005;AM-DEMS-SA-IPN, 2004). After the implementation of the strategy and as a result of tests for three interviews were applied. We report the results of the two processes.

Key words: acquired knowledge, functions and linear equations, high school

Introducción

Reformas recientes al nivel medio superior (SEMS-SEP, 2008) plantean la pregunta de si sus estudiantes poseen los conocimientos requeridos para lograr los objetivos propuestos. Por ello, en condiciones reales de aula, se han venido realizando procesos de investigación sobre la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de fundamentos para el estudio de temas de matemáticas, a la vez que el docente ha venido indagando acerca del conocimiento de los alumnos requerido para la enseñanza de esos temas. Este informe se refiere al concepto de pendiente en el plano, que se imparte en la unidad de aprendizaje de Álgebra.

Antecedentes

El seminario “Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico” conjugó la investigación y la indagación de la docencia en matemáticas en esa modalidad educativa; posibilitó el desarrollo de reflexiones y acciones relativas a la enseñanza de las matemáticas en condiciones de tiempo de aula real e institucional. Investigadores y docentes discutieron y acordaron objetivos,

métodos e instrumentos aplicados en el aula y en interrogatorios (cámara Gesell); analizaron datos recopilados e identificaron resultados.

Objetivos y preguntas de la indagación

Reconocer conocimientos de matemáticas adquiridos por los estudiantes requeridos para el estudio del tema Funciones y Ecuaciones lineales, contenido del Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: “Álgebra”; identificar el uso de las jerarquías en las operaciones básicas aritméticas y algebraicas y de la noción del por ciento; reconocer los procedimientos empleados respecto a la modelación en el proceso de la resolución de problemas algebraicos. ¿Cuáles las condiciones de conocimiento adquirido de los estudiantes que inician actividades de aprendizaje de la UA: “Álgebra”? ¿Cuáles las dificultades que manifiestan para la comprensión de representaciones: tabular; gráfica; algebraica ante la resolución de un problema?

Objetivos y preguntas de la investigación

Reconocer la comprensión de las ideas acerca: del irracional “raíz de dos” y de sus representaciones; del segmento geométrico inconmensurable; de las propiedades de las operaciones aritméticas y algebraicas elementales; reconocer las nociones de racionales e irracionales y de su orden en la recta; ¿Las nociones matemáticas adquiridas por los estudiantes que inician el estudio del Álgebra en el Cecyt No 4 son las requeridas para el logro de los Aprendizajes Propuestos en el Programa? ¿Cuáles son las condiciones de posibilidad de la adquisición de las nociones requeridas, que permitan el diseño de estrategias de enseñanza pertinentes durante el desarrollo de la Unidad de Aprendizaje del Álgebra?

Marco de referencia

Al tema “Funciones y Ecuaciones lineales” [U-III del programa de la UAÁ] le anteceden los tratamientos de “Números reales” sus operaciones y el concepto de “razón”; “Ecuaciones lineales” y “Recta-sistemas lineales” (Butts, Phillips y Shaughnessy, 2005) Los contenidos de la U-III se fundamentan en Actividades que ponen en foco la resolución de problemas “Por problema se entiende una situación matemática o extramatemática que no tiene solución inmediata, ...” (AM-DEMS-SA-IPN, 2004), estrategias con el uso de programas de cómputo (Martínez, Sánchez y Moctezuma, 2011). Los fundamentos cognitivos relativos al concepto “pendiente de la recta en el plano”: “razón y proporcionalidad” y “números racional e irracional” se les considera bajo el tratamiento de la métrica euclideana al primero y de la noción de inconmensurabilidad al segundo. El Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra (DEMS-SA-IPN, 2008) señala 72 horas en Aula; 18 horas en otros ambientes de aprendizaje (una hora por semana) que suman un total de 90 horas por

semestre. Para esta unidad se seleccionó el tema de funciones y ecuaciones lineales, el cual se ubica en la 3ª unidad, porque se consideró que su tratamiento en la última unidad permitiría el desarrollo de las primeras unidades como antecedente fundamental para el estudio indagatorio que considera arribar al tema de resolución de problemas. El programa de estudio asigna 25 horas (20%) para el estudio del tema de funciones y ecuaciones lineales. Toda la unidad 3 señala como competencia particular a lograr que el estudiante “Emplea las funciones y ecuaciones lineales en la solución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal, social”. La unidad incluye tres Resultados de Aprendizaje Propuestos, a saber: RAP 1: “Identifica elementos de las funciones lineales a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas en su ámbito personal y social”. RAP 2: “Elabora modelos que den lugar a ecuaciones y/o sistemas lineales a partir de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias”. RAP 3: “Utiliza modelos en la solución de problemas que dan lugar a ecuaciones y sistemas lineales en situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.

Método

La condición: *indagación-investigación*, planteó la diferencia en diseño de los instrumentos: dos para la indagación (CE; CEv) pero también, en el mismo sentido, el diseño del guión de la entrevista.

A 44 estudiantes de primer semestre de bachillerato tecnológico se les aplicaron dos cuestionarios, uno de investigación (CI) relativo a fundamentos conceptuales, otro de enseñanza (CE), para identificar el conocimiento adquirido de los estudiantes al inicio de la Unidad de Aprendizaje Álgebra. Un tercero se aplicó al término de la unidad 3: Funciones y ecuaciones lineales tema de indagación (CEv). Los tres, impresos en papel para su contestación individual con lápiz o pluma, se aplicaron en el aula a la hora habitual de clase. Por las respuestas obtenidas a los reactivos planteados en cada uno de los cuestionarios y por la disposición mostrada, se entrevistó individualmente en cámara Gesell, a manera de clínica, a tres estudiantes (uno respecto al CI y dos al CE), para profundizar sobre su comprensión de los conceptos en foco. Las entrevistas, de 1 hora, se videograbaron para el análisis de sus contenidos. Para tratar los contenidos en el aula se diseñó una estrategia de enseñanza a partir del seguimiento de los RAP de las unidades I y II previas al tema de indagación. Consideró de la propuesta del texto (Butts, Phillips, Shaughnesy. 2005), los modelos: Tabular, gráfico y simbólico para tratar los contenidos: ecuaciones lineales simples; introducción a la proporción y ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$. Se entregó a cada estudiante un cuadernillo para el control y seguimiento de las tareas en el aula que reproducía el plan del texto. Cada estudiante tendría que realizar en clase las tareas propuestas en el texto (copiar

doce ejemplos con el propósito de atender los procesos implícitos) y entregarlas al final de la sesión.

Instrumentos

Los criterios para el análisis de los resultados de respuestas correctas a cada uno de los cuestionarios fueron: a) investigación: interpretación de las representaciones del número irracional “raíz de dos”; interpretación de la medida del segmento diagonal del cuadrado y su relación con las representaciones de “raíz de dos”; identificación de las propiedades de operaciones algebraicas elementales; b) enseñanza: identificación de procedimientos ante la solución de operaciones, aditivas y multiplicativas simples, aritméticas y algebraicas; uso del sistema decimal ante la solución de problemas; c) evaluación del tema en foco: identificación de los procedimientos en la resolución de problemas, ecuaciones lineales, en situación específica.

Cuestionario I

Consistió de diez reactivos distribuidos en cuatro secciones. Los contenidos se centraron en cuatro nociones fundamentales: a) el irracional “raíz de dos” y sus representaciones: clásica; decimal; notación científica; b) la inconmensurabilidad del segmento unitario: diagonal del cuadrado unitario; concatenación; c) las representaciones de racionales e irracionales en la recta numérica y d) nueve propiedades de las operaciones algebraicas básicas. La caracterización de este instrumento se presenta en la Tabla I.

Reactivos	Objetivo: Reconocer nociones adquiridas:	Contenido
I: R[1-2-3]	Del Irracional “raíz de dos”:	(1): representación clásica; (2) expresión “decimal” cuatro cifras significativas; (3): notación científica
II: R[5-8-9]	Del segmento geométrico inconmensurable: Irracional “raíz de dos”:	(5) Cuadrado unitario_ triángulo isósceles_ diagonales; (8) Dos triángulos isósceles, concatenación horizontal (rojo) de sus diagonales; (9) Dos triángulos isósceles, catetos unitarios; catetos con valor dos, concatenación horizontal (azul) de sus diagonales
III: R[4-6-7]	De racionales e irracionales: orden en la recta.	(4) racionales; (6) irracionales; (7) Conjunto numérico
IV: R-10	De las propiedades de las operaciones	1) idéntico para la adición; 2) inverso multiplicativo; 3) distributiva; 4) conmutativa para la multiplicación; 5) asociativa para la suma; 6) inverso aditivo; 7) asociativa para la multiplicación; 8) conmutativa para la suma; 9) idéntico para la multiplicación

Tabla I. Caracterización del cuestionario I

Cuestionario E

Este instrumento se aplicó por norma, contuvo 27 reactivos en tres secciones (véase, caracterización, en la Tabla 2), se le contestó en 1 hora. Su objetivo general fue identificar los conocimientos adquiridos como requisito para cumplir los objetivos que propone la Unidad de Aprendizaje Álgebra.

Sección	Objetivo: Reconocer	Contenido	Reactivos
I Operaciones básicas [aritméticas-algebraicas]	Nociones adquiridas de operaciones aditivas y multiplicativas, simples, aritméticas y algebraicas	(a): Enteros; (b): Fracciones; notación científica (c): Por-ciento; (d): Operación algebraica simple	(a): 1, 2, 3, 4, 5 (b): 6; 8 (c): 7 (d): 9, 10
II Operaciones básicas II [aritméticas-algebraicas]	Nociones adquiridas de números: enteros, racionales (representaciones: decimal-fraccionaria); Simplificación y solución de operaciones algebraicas simples	Operaciones aritméticas simples: (a) adición de fracciones comunes; (b) expresión decimal –fracción; (c) Notación científica; Operaciones algebraicas simples: (d) simplificación de expresiones; (e) evaluación –sustitución de valores; (f) resolución de problemas	(a): 1, 5, 7, 10; (b): 3, (c):2, 9; (d): 8, (e): 4; (f): 6.
III Resolución de problemas simples [aritméticos – algebraicos]	Procedimientos en la resolución de problemas simples [aritméticos y algebraicos]	Problemas aritméticos; Representación gráfica de ecuación algebraica simple	1, 2, 3, 4, 5 y 6; 7.

Tabla 2. Caracterización del Cuestionario E

Cuestionario Ev

Consideró dos secciones: a) dos reactivos relativos a la noción de pendiente; b) tres problemas que implican la noción de pendiente para sus resoluciones. La caracterización de sus contenidos se presenta en la tabla 3.

Sección	Objetivo: Reconocer	Contenido	Reactivos
I Resolución de sistemas de ecuaciones lineales a través del método analítico o gráfico	El empleo de la fórmula de pendiente para encontrar la ecuación de la recta, algebraica y su representación y gráfica	(a): Encontrar de una ecuación la forma pendiente intercepción (b): Conociendo dos puntos encontrar la pendiente (c): despejar una literal de una formula (d):resolver una ecuación de primer grado con una incógnita	(a): 1 (b):2 (c):3 (d):4

<p>II Resolución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal, social</p>	<p>La forma de identificación de elementos de funciones lineales a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas en su ámbito personal y social</p>	<p>Solución de problemas mediante cálculos algebraicos simples: (a): sustitución del valor dado en el enunciado a la fórmula y despejar la incógnita para la obtención del resultado. (b): traducción del texto al lenguaje algebraico planteando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y su resolución (c) Análisis del problema para representarlo algebraicamente y obtener la solución</p>	<p>(a): 1 (b): 2, (c): 3</p>
---	--	--	--------------------------------------

Tabla 3. Caracterización del cuestionario Ev

Resultados, análisis y conclusiones

Criterios para el análisis a los resultados: a) de la aplicación del cuestionario I: el recurso a otras nociones matemáticas para argumentar a favor de la respuesta (por ejemplo el recurso al uso del teorema de Pitágoras para argumentar a favor de la respuesta sobre la irracionalidad del número “raíz de dos”); congruencia en la argumentación (al confrontar las respuestas a dos reactivos); la interpretación del segmento diagonal del cuadrado “unidad”; b) del cuestionario E: identificación de nociones de operaciones aritméticas elementales; identificación: de nociones a cerca de números reales; de la simplificación y solución de operaciones algebraicas simples; procedimientos en la resolución de problemas simples [aritméticos y algebraicos]; cuestionario Ev: identificación del uso de la noción de pendiente para encontrar la ecuación de la recta; procedimientos en la resolución de problemas que implican el uso de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas. Para el análisis de las entrevistas: la confrontación de respuestas a los cuestionarios y las dadas al guión de la entrevista.

Cuestionario I

Mediante la estrategia del análisis centrado: a) en lo que argumentaron; b) en el recurso a otras nociones matemáticas para argumentar a favor de la respuesta (por ejemplo el recurso al uso del teorema de Pitágoras para argumentar a favor de la respuesta sobre la irracionalidad del número “raíz de dos”); c) contradicciones entre respuestas (por ejemplo: en el reactivo 1, la respuesta correcta (“raíz de dos” ,en su representación clásica y 1.4142 : pertenecen a los números irracionales), en un reactivo posterior, la respuesta incorrecta (pertenecen a los racionales). De los resultados, se perfilan cuatro niveles referentes a las nociones adquiridas: a) noción aparentemente firme [15%]; b) noción que evidencia contradicciones [45%]; c) noción en proceso de adquirirse [10%]; d) noción ausente (respuestas sin-sentido) [30%]. Limitación de espacio no permite la inclusión completa de la concentración de los resultados generales en las tablas correspondientes a este apartado.

Racionales-Irracionales				
Reactivo	1		2	3
Inciso	a) identificación	b) argumento	Representación Decimal	Representación argumento
%	4	-	-	13

Tabla 4.1. Concentración cuantitativa de respuestas correctas a los reactivos 1, 2, 3 [nociones de números racional e irracional]

Orden en los reales										
Reactivo	4		6			7				
Inciso	Racionales	R/I	a) creciente	b) decreciente	c) (Pi; "raíz de 3"	Racionales en la recta	a) creciente	b) decreciente	c) identificación	
%	16	40	38	40	43	6	6	9	50	

Tabla 4.2. Concentración cuantitativa de respuestas correctas a los reactivos 4, 6, 7 [Representación del orden de los reales en la recta]

Inconmensurabilidad				Propiedades de las operaciones algebraicas								
Reactivo	5	8	9	10								
Propiedad	-	-	-	Idéntico		Inverso		Asociativa		Conmutativa		Distributiva
%	16	9	9	(+) 34	(x) 31	(+) 34	(x) 29	(+) 16	(x) 27	(+) 38	(x) 38	31

Tabla 4.3. Concentración cuantitativa de respuestas correctas a los reactivos: 5, 8, 9 [inconmensurabilidad]; 10 []

Cuestionario E

Se presentan dos ejemplos: la figura E1, evidencia que el uso de la jerarquía de los signos no fue reconocida se manifestó una tendencia a operarlos en el orden de la lectura de izquierda a derecha (confróntese con datos correspondientes en la tabla 4); no distinguieron las características del binomio (véase en la tabla 4 datos correspondientes a los reactivos 9 y 10 y figura. E2). La figura E3, corresponde a las dificultades para calcular el tanto por ciento. En la figura E4, se advierte el desconocimiento del contexto del problema relativo con el tema razones y proporciones estudiado en la unidad I.

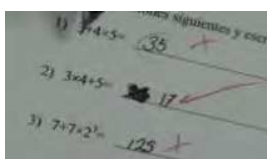


Figura. E1

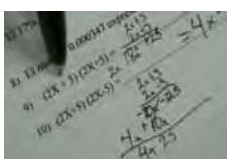


Figura. E2

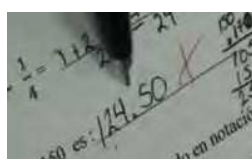


Figura. E3

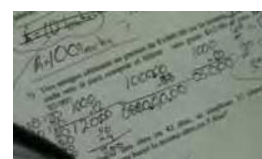


Figura. E4

Reactivos	Aditivas y multiplicativas fracciones	Jerarquía	Por ciento	Notación científica	Simplificación, binomios, términos semejantes	%
I, 2, 3						11; 88; 6
6I; II: I, 4, 7						34; 52; 27; 40
7-I; 5-III						22; 47
8I						52
9-10 I; 4-8 II						15; 15; 50; 50
	Resolución de problemas			Gráfica de ecuación simple		
I, 2, 3, 4, 6						50; 25; 15; 22; 11
7						20

Tabla 5. Concentración cuantitativa de respuestas correctas al Cuestionario E

Cuestionario Ev

El reactivo II-1 (seleccionado para guía de entrevista): En una ciudad el costo de la electricidad está expresado por la fórmula: $C = 0.07n + 65$, ..., C es el costo y n la cantidad de kw-hora consumidos. Calcula la cantidad de kw/h que corresponde a costos de \$50, \$76.50 y \$125. Su resolución nos permitió identificar el conflicto que les representó el desconocimiento de los parámetros de la ecuación

Reactivos	Proceso de soluciones algebraicas para identificar la pendiente		%
	Reconocer la pendiente en una ecuación lineal	Operaciones algebraicas básicas en la solución de igualdades	
I: 1, 2			11; 88
I: 3, 4			34; 40
	Identificación de la pendiente mediante el proceso de solución del problema	Planteamiento a partir del enunciado del problema	
II: 1			11
II: 2, 3			20

Tabla 6. Concentración cuantitativa de respuestas correctas al cuestionario Ev

Entrevistas

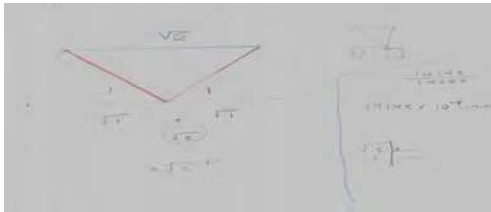


Figura 1

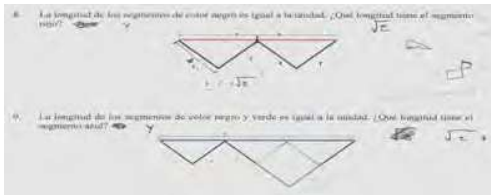


Figura 2



Figura 3

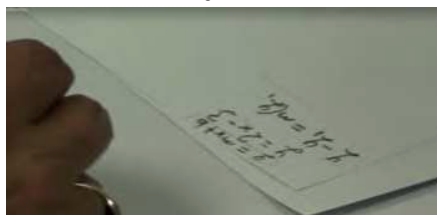


Figura 4

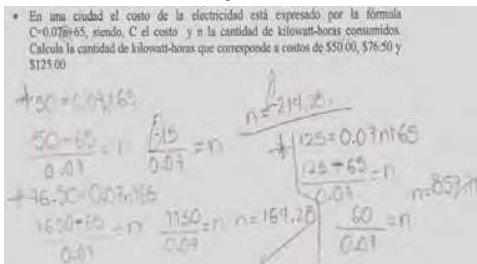


Figura 5

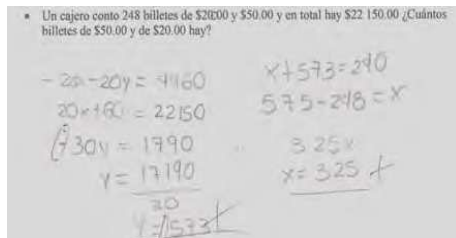


Figura 6

Entrevista I

I: Insistes, convénceme... ¿por qué “raíz de uno” más “raíz de uno” es “raíz de dos”?

E: [procede a realizar la operación correspondiente a encontrar el valor de “raíz de dos”... no lo logra]

La respuesta a los reactivos 8 y 9 del C-I , evidencian la consistencia de los resultados en la entrevista...

[Confróntese las Figuras 1 y 2]

Entrevista -E

Docente : ¿este número como se llama en la ecuación ? Al: ...

D: ¿ Recuerdas que era la m en la ecuación?

Al: [responde con dudas e inseguridad y no logra identificar el “2” como valor de la pendiente (m)]

Después de intentos fallidos regresa a las formas de expresión de encontrar la pendiente conociendo dos puntos pero en ningún momento consigue conocer el valor de la pendiente que en este caso es “2”

Entrevista -Ev

Docente:¿Cuánto hay que pagar si no hay consumo? Al: nada

D: ¿ Que representa en la ecuación que el consumo sea cero?....

D: A ver, ¿por qué no graficas la expresión?

Al: ... [no logra identificar la ordenada al origen]

Entrevista –Ev

D: ¿ Cuantas variables tenemos ?

Al: dos

D: ¿ Como representamos los billetes de \$50 y de \$20 y que condición debe cumplirse?

Al: ... [Se le dificulta el planteamiento y cuando lo logra falla en la resolución del sistema 2 x2]

Conclusiones

- a) las ideas intuitivas relativas a las nociones básicas de los conceptos de número racional e irracional presentan confusiones importantes;
- b) respecto a las representaciones de los números " $\sqrt{2}$, π , e " se manifiesta una ausencia en la comprensión de su origen incluso su utilidad en la solución de problemas;
- c) la noción de inconmensurabilidad del segmento diagonal del cuadrado unitario, no se concibe como resultado de la aplicación del teorema de Pitágoras;
- d) las propiedades de las operaciones aritméticas y algebraicas se identifican por eliminación.

Los resultados advierten: la presencia de aprendizajes deficientes ante los requerimientos para el logro de los aprendizajes propuestos en el programa de la UAÁ; desconocimiento del sentido de magnitud geométrica, comparación de segmentos y su relación con la definición de número irracional (e ; π ; $\sqrt{2}$) y sus representaciones. El uso de la calculadora inhibe, tal vez, los procesos cognitivos del estudiante orientados a la comprensión de los conceptos matemáticos en su sentido *formal*. La investigación *en curso* incorpora esta conclusión como su objeto del estudio de *medios de enseñanza* en el aula.

Referencias bibliográficas

- Académica de Matemáticas, DEMS. (2004). *Álgebra. Libro para el estudiante*. México: IPN.
- Butts, T., Phillips, E. y Shaughnessy, M. (2005). *Álgebra con aplicaciones*. Oxford: University Press.
- Martínez, R., Sánchez, G. y Moctezuma, R. (2011). *Polilibro de Álgebra. CECyT No 4* México: IPN. Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra (DEMS-SA-IPN, 2008)