A CORPORIFICAÇÃO DO CONCEITO DE CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS INFINITAS POR MEIO DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

Daila Silva Seabra de Moura Fonseca, Regina Helena de Oliveira Lino Franchi
Universidade Federal de Ouro Preto Brasil
dailasmfonseca@yahoo.com.br, reginafranchi@uol.com.br

Resumo. Este trabalho apresenta uma pesquisa, que usou a metodologia qualitativa e teve por objetivo verificar se atividades desenvolvidas para promover a corporificação dos conceitos, com a utilização do software GeoGebra, favorecem a compreensão do conceito de convergência de sequências e a transição do pensamento matemático elementar para o avançado. Os referenciais teóricos utilizados foram: o *Pensamento Matemático Avançado* e os *Três Mundos da Matemática*. Foram desenvolvidas atividades exploratórias, buscando a corporificação do conceito de convergência pela manipulação de sequências por meio dos recursos gráficos e numéricos do software. A análise dos dados permite concluir que as atividades promoveram a corporificação do conceito de convergência e a formação de uma base para o pensamento matemático avançado.

Palavras chave: três mundos da matemática, corporificação, convergência, sequências infinitas

Abstract. This paper presents research that used qualitative methodology and aimed at verifying if activities developed to promote the embodiment of concepts using the software GeoGebra contribute to the understanding of the concept of convergence of sequences and the transition from elementary to advanced mathematical thinking. The theoretical references used were: *Advanced Mathematical Thinking* and the *Three Worlds of Mathematics*. Exploratory activities were developed seeking the embodiment of the convergence concept by the handling of sequences through the graphic and numerical features of the software. Data analysis shows that the activities promoted the embodiment of the convergence concept and the formation of a basis for advanced mathematical thinking.

Key words: three worlds of mathematics, embodiment, convergence, infinite sequences

Introdução

É possível observar, nas disciplinas iniciais dos cursos superiores, as dificuldades apresentadas pelos alunos para compreensão de conceitos matemáticos. Uma dessas disciplinas iniciais é o Cálculo Diferencial e Integral, que tem índices de reprovação notoriamente altos. Entre os temas abordados no Cálculo estão as sequências e as séries infinitas, cujo tratamento matemático requer um tipo de pensamento mais abstrato, com características diferentes do pensamento matemático elementar, usualmente trabalhado no Ensino Médio.

O contexto descrito acima motivou uma pesquisa de mestrado (realizada pela primeira autora deste artigo e orientada pela segunda autora), com o objetivo de verificar se o desenvolvimento de atividades, buscando a corporificação dos conceitos, com utilização do *software* GeoGebra, contribui para a compreensão da convergência de sequências e séries infinitas, favorecendo a transição do pensamento matemático elementar para o avançado. A corporificação de conceitos é parte de um dos quadros teóricos utilizados como referência nessa pesquisa, denominado *Três Mundos da Matemática.* O outro se denomina *Pensamento Matemático Avançado.* Ambos discutem o ensino e a aprendizagem da matemática superior.

As atividades foram desenvolvidas no segundo semestre de 2011, nas aulas da disciplina Cálculo II, do curso de Engenharia de Produção de uma escola pública profissionalizante, localizada no interior do estado de Minas Gerais, Brasil, em que a primeira autora deste artigo atuava como docente. O desenvolvimento das atividades foi documentado através de gravações de áudio, gravações das telas dos computadores, registros escritos das atividades desenvolvidas e anotações no caderno de campo da professora-pesquisadora a respeito do comportamento dos alunos e do desenvolvimento das aulas. A análise dos dados nos indicou que as atividades promoveram a corporificação do conceito de convergência na maioria dos alunos e também que grande parte dos alunos possui potencial para a transição entre os três mundos da matemática, verificando-se, assim, o processo de passagem do pensamento matemático elementar para o avançado.

Trazemos para este artigo um recorte da pesquisa desenvolvida no mestrado, enfocando, mais especificamente, a corporificação da convergência de sequências. Discussões e resultados sobre a convergência de sequências e séries, nos Três Mundos da Matemática, podem se encontrados em Fonseca (2012).

Sobre os aportes teóricos utilizados

O quadro teórico *Pensamento Matemático Avançado* começou a ser discutido na década de 1970 por um grupo pesquisadores, dentre eles David Orme Tall e Tommy Dreyfus. Nesse quadro, discute-se, entre outras coisas, como se dá e quais são os problemas enfrentados na transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado. Para esta pesquisa, optou-se por trabalhar na linha definida por Dreyfus (1991) que considera o pensamento matemático avançado como um processo, composto por vários outros processos de aprendizagem que interagem entre si. Entre eles, destacam-se os de representar, visualizar, classificar, conjecturar, analisar, sintetizar, generalizar e abstrair. Para o autor, uma característica distintiva entre o pensamento matemático elementar e o avançado está na complexidade do conceito matemático e na forma como ele é tratado. Considera ainda que é possível passar de um para o outro por meio dos processos de representação e abstração, uma vez que, com eles, é possível gerenciar a complexidade da Matemática.

Sobre os *Três Mundos da Matemática*, Tall (2004), ao referir-se aos estudos realizados conjuntamente com Ana Poyter a respeito da conceitualização dos alunos sobre vetores, diz: "percebemos que havia não só três tipos de conceitos matemáticos (geométrico, simbólico e axiomático), havia na verdade três tipos muito diferentes de desenvolvimento cognitivo que habitavam três diferentes mundos da Matemática" (p. 2).

Os *Três Mundos da Matemática* são identificados por Tall como: mundo *conceitual/corporificado*, mundo *proceitual/simbólico* e mundo *formal/axiomático*. O mundo corporificado está na base do pensamento matemático e é fundamentado nas nossas percepções e ações sobre o mundo, ou seja, baseia-se "na percepção e reflexão sobre propriedades de objetos, inicialmente vistos e percebidos no mundo real, mas depois imaginados na mente" (Tall, 2008, p.8). Tall (2008) utiliza o termo *corporificado* para se referir ao pensamento construído, fundamentalmente, a partir de percepções sensoriais, ações e experiências de pensamento, no sentido de "dar um corpo" a uma ideia abstrata. O mundo proceitual é o mundo dos símbolos e processamentos que utilizamos, ao efetuarmos cálculos e manipulações algébricas, aritméticas, entre outros. Inicia-se com *ações* que são encapsuladas em conceitos "usando símbolos que nos permitem alternar facilmente de processos de *fazer* matemática para conceitos de *pensar* sobre" (Tall, 2004, p. 3). Por outro lado, o mundo formal é caracterizado pelo uso de definições formais para os conceitos, a partir das quais deduções são feitas, e pressupõe a construção de um sistema axiomático como, por exemplo, teoria de grupos, análise e topologia (Tall, 2003).

Os três mundos interagem entre si e possuem maneiras diferenciadas de demonstração. Considera-se verdade, no mundo corporificado, aquilo que é visível. A realização de um experimento para verificar se determinado resultado esperado ocorre pode ser um meio de realizar uma prova nesse mundo (Tall, 2004). No mundo proceitual, o cálculo com números, a manipulação de símbolos algébricos e a utilização desses símbolos para generalizar estabelece a verdade (Tall, 2003 e 2004). No mundo formal, a utilização de axiomas e de definições formais possibilita que deduções sejam feitas e assim se fazem as provas.

Tall (2003) aponta vantagens da utilização de *softwares,* nos quais os alunos podem manipular diferentes tipos de gráficos, para criação de abordagens corporificadas no Cálculo, dando fundamento para ideias refinadas da Análise. Além disso, Franchi (2007) argumenta sobre a frequência com que conjecturas aparecem em aulas em ambientes informatizados: a "comparação entre as representações gráficas, algébricas e numéricas, a observação e a reflexão sobre o observado podem levar à elaboração de conjecturas" (p. 184). Considerando dessa forma que os ambientes informatizados podem ser favoráveis à elaboração de conjecturas pelos alunos, Fonseca (2012) identifica esses ambientes como propícios para o desenvolvimento de atividades que visam levar os alunos a transitarem pelos Três Mundos da Matemática. Em Fonseca (2012), escolheu-se o *software* GeoGebra para o desenvolvimento das atividades, principalmente por ser um *software* de matemática dinâmica, gratuito e que possui as representações algébrica, gráfica e numérica interligadas.

Considerações sobre o desenvolvimento das atividades e resultados

As atividades foram elaboradas e aplicadas de forma que os alunos pudessem explorar a convergência de sequências, com vistas à corporificação do conceito, estimulando a formação de conjecturas, visando à passagem para o mundo proceitual e a formulação de uma base para as provas formais. Essas atividades foram aplicadas, em aulas práticas (em um ambiente informatizado utilizando o *software* GeoGebra) e posteriormente discutidas em aulas teóricas, momentos em que os conceitos foram formalizados.

Os recursos do *software* foram usados para abordagem dos conceitos, antes que os mesmos fossem introduzidos de modo teórico. Os termos "*converge*" e "*diverge*" só foram trabalhados com os alunos após a realização de todas as atividades exploratórias sobre sequências e, portanto, não era esperado que os alunos os utilizassem nas atividades iniciais. Foram exploradas diferentes formas de representação, buscando também estabelecer relações entre elas. Foram usados recursos algébricos (para as expressões das sequências), gráficos (para representação da sequência como função de domínio natural e como conjunto de pontos em uma reta) e numéricos (para cálculo dos valores dos termos da sequência e representação em uma planilha). Além das visualizações possíveis através dos gráficos e planilhas, estimularam-se reflexões de cunho teórico, com base na análise das distâncias entre termos consecutivos da sequência e das distâncias entre os termos da sequência e o ponto de aderência para sequências convergentes.

A título de exemplo, trazemos algumas das possibilidades de visualização do comportamento dos termos das sequências exploradas pelos alunos e que, no mundo corporificado, podem ser aceitas como provas da convergência. Para ver o comportamento dos termos da sequência, podemos utilizar dados gráficos ou numéricos. No caso dos gráficos, é possível representar os termos da sequência como pontos em uma reta ou como gráfico de uma função de domínio discreto. A figura 1 exemplifica essas representações para sequência $a_n = \frac{3n-2}{n}$, sendo que os pontos no eixo vertical (*Q*, pontos em uma reta) são as projeções ortogonais dos pontos (*P*) do gráfico da função sobre o referido eixo:

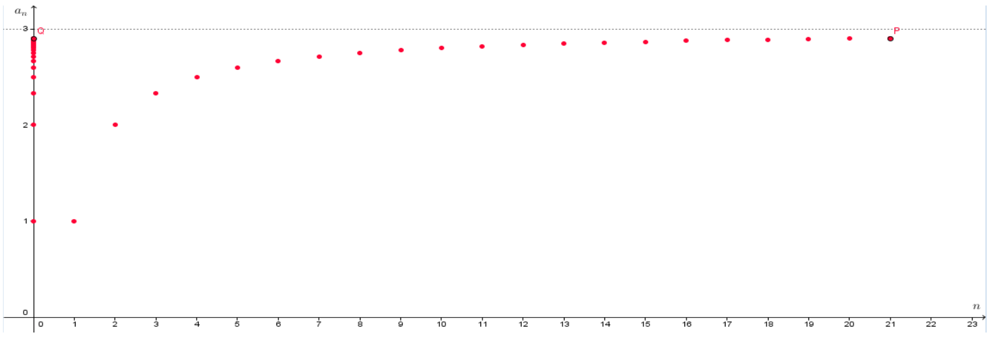


Figura 1: Corporificação da convergência da sequência $a_n = \frac{3n-2}{n}$ (Fonte: Elaborado por las autoras)

A figura anterior pode ser aceita como uma prova corporificada de que a sequência $a_n = \frac{3n-2}{n}$ converge e que o valor de convergência pode ser três, pois é possível visualizar e perceber que, à medida que aumentamos o valor de *n* (com o auxílio de uma ferramenta do GeoGebra chamada *Controle Deslizante*), o valor de a_n também aumenta e se torna cada vez mais próximo de três, já que não há qualquer indício de que irá ultrapassá-lo. Além disso, é possível observar, pela representação sobre uma reta (no eixo *y*), que as distâncias entre os termos consecutivos da sequência estão cada vez menores e/ou que as distâncias entre os termos da sequência e o possível valor de convergência (para sequências convergentes) estão cada vez menores.

Na análise dos dados, foi necessário buscar evidências da corporificação dos conceitos e da passagem do pensamento matemático elementar para o avançado nas palavras e/ou imagens desenvolvidas pelos alunos. Interpretamos que o aluno visualizar o comportamento da sequência com o aumento do número de termos (possível pelos recursos do software) possibilita a corporificação do conceito, pois entendemos que visualizar o comportamento é mais do que enxergar os termos que se apresentam, é realizar experiências de pensamento, tentando interpretar o que se enxerga para além do número finito de termos apresentados.

Uma evidência de corporificação é encontrada na resposta dos alunos em uma das atividades, na qual foi solicitado que analisassem o comportamento da sequência de termo geral $a_n = \frac{5}{n}$.

Foram consideradas as representações: gráfica como função com domínio discreto (ponto *P*), gráfica como pontos sobre uma reta (ponto *Q*) e numérica, por meio da representação dos valores numéricos em uma planilha. Na figura 2, a seguir, representa-se a resposta de dois alunos, identificados como A15 e A25, sobre o que acontecerá com a essa sequência quando o valor de *n* tender ao infinito.

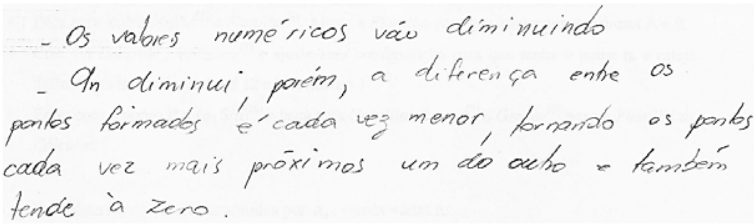


Figura 2: Resposta dos alunos A15 e A25 sobre o comportamento de uma sequência.

Entendemos que a convergência foi percebida pelos alunos, ao observarem que os valores numéricos vão diminuindo, tendendo a zero, e ainda que as diferenças entre os pontos também estão diminuindo. Vale destacar que a diminuição das diferenças, que foi percebida pelos alunos, pode ser o que Tall (2003) chama de raiz cognitiva, na medida em que, sendo significativa para os alunos, contém as sementes da expansão cognitiva para definições formais e posterior desenvolvimento teórico. Vislumbramos o Critério de Cauchy como possível expansão teórica para esse caso.

Em outra atividade desenvolvida posteriormente, em que se discutia a convergência da sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$, tentou-se aproximar do Critério de Cauchy, pedindo aos alunos que observassem o que acontecia com as distâncias entre dois pontos consecutivos da sequência. Nessa atividade, foram usadas duas representações: a dos valores numéricos dos pontos da sequência representados em uma planilha e também a representação como pontos de uma reta (ponto $Q = \left(0, \frac{n}{n+1}\right)$). A título de exemplo, apresentamos a resolução do aluno que denominamos A13. Na tela da figura 3, a coluna B traz os valores numéricos dos termos da sequência e a coluna C, os valores das diferenças. É interessante observar o uso do controle deslizante para aumentar o número de termos da sequência, que neste caso, chegou a 721.

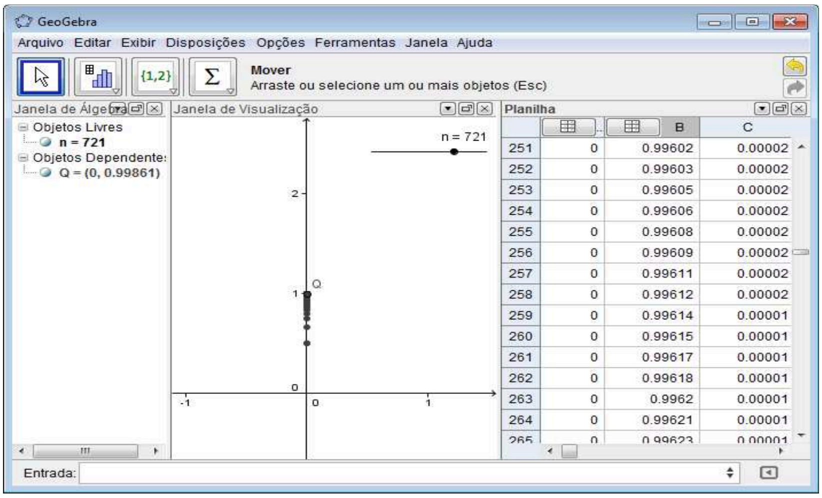
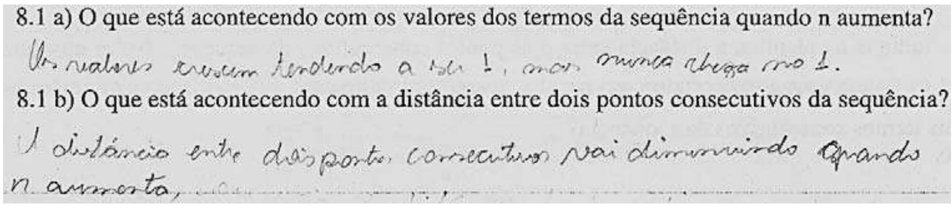


Figura 3: Manipulação do software para verificar o comportamento da sequência.

As respostas do aluno A13 a respeito do comportamento da sequência apresentada, obtidas com base na exploração dos recursos do GeoGebra, são apresentadas na figura 4 a seguir:


8.1 a) O que está acontecendo com os valores dos termos da sequência quando n aumenta?

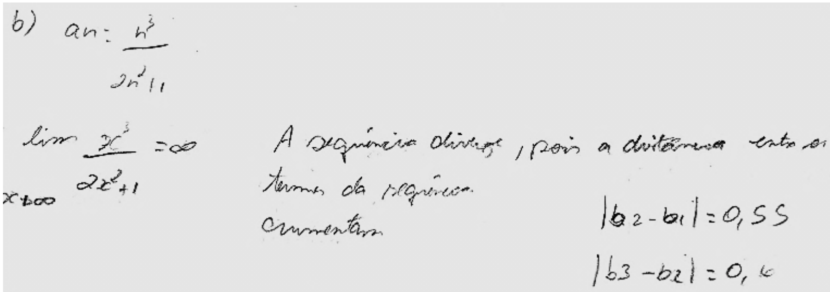
Os valores crescem tendendo a ser 1, mas nunca chega no 1.

8.1 b) O que está acontecendo com a distância entre dois pontos consecutivos da sequência?

A distância entre dois pontos consecutivos vai diminuindo quando n aumenta,

Figura 4: Resposta dada pelo aluno A13 sobre o comportamento da sequência.

Entendemos que a atividade contribuiu para a corporificação do conceito e um indício foi a resposta dada pelo mesmo aluno a respeito da convergência da sequência de termo geral $a_n = \dfrac{n^3}{2n^2 + 1}$ em uma atividade posterior de avaliação, como se observa na figura 5.


b) $a_n = \dfrac{n^3}{2n^2+1}$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{2x^2+1} = \infty$

A sequência diverge, pois a distância entre os termos da sequência aumentam

$|b_2 - b_1| = 0,55$

$|b_3 - b_2| = 0,6$

Figura 5: Resposta do aluno sobre a convergência da sequência na atividade avaliativa.

Interpretamos que o aluno A13 corporificou o conceito de convergência, na medida em que percebeu que a sequência não era convergente, porque as distâncias entre os termos estavam aumentando. Essas distâncias foram calculadas pelo aluno pelos módulos das diferenças entre os valores numéricos dos termos da sequência, o que nos dá indícios de que o aluno também atingiu o mundo proceitual. Nesse caso, podemos dizer que foi construída uma base a partir da qual o pensamento matemático avançado pode ser atingido.

A análise do conjunto de dados permite concluir que as atividades exploratórias, com uso dos recursos de manipulação e representação do *software,* contribuíram para a corporificação do conceito de convergência de sequências e para a formação de uma base para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos atividades desenvolvidas, buscando a corporificação do conceito de convergência de sequências, com o objetivo de facilitar a compreensão do referido conceito e, ao mesmo tempo, contribuir para a transição entre o pensamento matemático elementar e o avançado.

Pela análise dos dados, concluímos que esses objetivos foram atingidos. Foi possível perceber que os alunos participaram de forma ativa nas atividades, observando e agindo sobre o observado. As atividades possibilitaram diferentes formas de visualização e a construção de imagens mentais dos conceitos, permitindo a formação do conceito de convergência. Para Fonseca (2012), os dados indicam que a maioria dos alunos "com suas experiências de pensamento, formou a imagem mental de que a convergência de uma sequência ocorre quando os termos da sequência se tornam cada vez mais próximos de um valor, tendo assim corporificado o conceito de convergência" (p. 160).

Os dados nos indicam também que vários dos processos de aprendizagem, apontados por Dreyfus (1991), aconteceram na maioria das atividades. Entre eles, tiveram maior destaque os de representar, visualizar e conjecturar. Entendemos que, dessa forma, as atividades contribuíram para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado nos alunos.

É importante destacar a grande contribuição do ambiente informatizado para o desenvolvimento das atividades. Os recursos do *software* GeoGebra, utilizados nas atividades, tiveram influência decisiva no processo de corporificação do conceito de convergência, na medida em que possibilitaram a manipulação para construção das sequências de modo dinâmico, permitindo diferentes formas de representação e visualização. Além disso, a interface possível, entre essas diferentes formas, foi propícia para formulação e verificação de conjecturas.

Esperamos que este texto apresente algumas alternativas para trabalho em sala de aula com os conceitos de convergência de sequências. Estamos convictas de que atividades semelhantes às propostas neste trabalho, embora demandem tempo, trazem grande contribuição para construção de uma base sólida sobre a qual o pensamento formal poderá ser estruturado. Convidamos o leitor a explorar os diferentes recursos do s*oftware* e construir suas próprias atividades.

Referências bibliográficas

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Org.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Londres: Kluwer Academic Publishers.

Franchi, R. H. O. L. (2007). Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e Informática como possibilidades para a Educação Matemática. In J. C. A. Barbosa, A. D. Caldeira, & J. L. Araújo, (Ed.), *Modelagem Matemática na educação matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais* (pp. 177-193). Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Fonseca, D. S. S. M. (2012). *Convergência de sequências e séries numéricas no Cálculo:* um trabalho visando a corporificação dos conceitos. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

Tall, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L. M. Carvalho, & L. C. Guimarães (Ed.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática* 1, (pp. 1-28). Rio de Janeiro: Brasil.

Tall, D. (2004). *Introducing Three Worlds of Mathematics*. Recuperado el 26 de agosto de 2010 de http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking Mathematics. *Mathematics Education Research Journal,* 20, 5-24.