

## LUGAR GEOMÉTRICO Y LA RECTA EN EL PLANO: ANTECEDENTES PARA SU ENSEÑANZA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera, Fausto Mendoza Díaz  
amojeda@cinvestav.mx, hchavez@cinvestav.mx, mendizf@hotmail.com  
DME, Cinvestav; CECyT No 4 “Lázaro Cárdenas”, IPN

México

**Resumen.** En el marco de un acuerdo interinstitucional, se investiga e indaga acerca de la formación matemática de estudiantes de bachillerato tecnológico. Se aplicaron dos cuestionarios a 39 estudiantes de tercer semestre, uno sobre los fundamentos del tema de lugar geométrico de la recta en el plano y otro sobre los conocimientos requeridos para acceder a su enseñanza. Además, se entrevistó a dos estudiantes individualmente acerca de sus respuestas en el primer cuestionario. Los datos obtenidos revelaron deficiencias en la identificación y cálculo de una pendiente, en la expresión verbal, gráfica o simbólica de lugares geométricos simples, confusión entre segmento de recta y recta, desconocimiento de procedimientos geométricos elementales, de operatividad algebraica y falta de identificación de términos de expresiones simbólicas. La enseñanza de la recta en el curso de Geometría Analítica tuvo que enfrentar estas condiciones desde el principio.

**Palabras clave:** comprensión, lugar geométrico, recta, bachillerato

**Abstract.** Under an interinstitutional agreement, a qualitative research and an inquiry were carried out about the mathematical background of technical high school students. Two questionnaires were applied to 39 students at third semester, one focused on the fundamentals of the locus of the straight line in the Cartesian plane, the other dealt with the knowledge the students required to be taught that subject. In addition, two students were individually interviewed about their answers in the first questionnaire. The data obtained revealed students' deficiencies to identify and calculate the slope and to express simple loci, either verbally, graphically or symbolically; they did not discriminate between a straight line segment and a straight line, they lacked of basic geometrical and algebraic procedures, and failed to identify the terms of symbolic expressions. The teaching of the straight line in the Analytic Geometry course had to face these conditions from the outset.

**Key words:** understanding, locus, straight line, high school

### Introducción

De las reformas recientes al nivel medio superior (SEMS-SEP, 2008; [www.profordems.cfie.ipn.mx/profordems3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema\\_Nacional\\_Bachillerato.pdf](http://www.profordems.cfie.ipn.mx/profordems3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema_Nacional_Bachillerato.pdf)) surge la interrogante de si sus estudiantes poseen los conocimientos requeridos para lograr los objetivos propuestos. Por ello, en condiciones de tiempos reales de aula, se ha venido investigando sobre la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de fundamentos para el estudio de temas de matemáticas, al tiempo que el docente ha venido indagando acerca del conocimiento de los alumnos requerido para la enseñanza de esos temas. Estas acciones conjuntas de indagación de la docencia e investigación se realizan bajo un acuerdo interinstitucional. Este informe se refiere al lugar geométrico de la recta en el plano, que se imparte en la unidad de aprendizaje de Geometría Analítica. El tema fue seleccionado por el docente.

Las preguntas de la investigación y de la indagación fueron, respectivamente:

- ❖ ¿Qué caracteriza a la comprensión de los estudiantes del bachillerato tecnológico de los fundamentos del lugar geométrico de la recta en el plano cartesiano para acceder al estudio del tema?
- ❖ ¿Cuál es el conocimiento efectivo de los alumnos previo a la enseñanza del lugar geométrico de la recta en el plano cartesiano?

### Elementos teóricos y antecedentes

El *lugar geométrico* de la recta en el plano es el conjunto de puntos que satisfacen que la pendiente de sus segmentos, determinados por cualquier par de puntos de la recta, es constante. Los teoremas básicos de interés aquí que atañen a la recta implican distancia entre puntos, segmentos de recta definidos por pares de puntos, rectas perpendiculares, paralelas, intersección de rectas, bisección de segmentos y de ángulos. Las cuestiones principales que estudia la Geometría Analítica son: dada una ecuación algebraica, determinar el lugar geométrico correspondiente; dado un lugar geométrico en un sistema de coordenadas, determinar la expresión algebraica respectiva (Leithold, 1982).

Recientemente, Martínez, Mendoza, Chávez, Garnica y Ojeda (2012) han señalado algunas dificultades de estudiantes de bachillerato para reconocer las funciones trigonométricas (en particular la tangente), las medidas de ángulos notables y la ausencia de formación en las construcciones con regla y compás.

En el ámbito de los recursos semióticos, en particular de la gráfica construida en un sistema de dos ejes coordenados perpendiculares, Acuña (2006) ha advertido de la disociación de fondo y figura, ya que los estudiantes conciben una gráfica como dibujo; no se percatan del papel de la escala en los ejes coordenados ni del carácter infinito de la recta. Pomerantz (1985) ha señalado que la organización perceptual al procesar la información se basa en discriminaciones y agrupamientos resultantes de los rasgos del objeto percibido que atraen la atención del individuo, como la configuración, que provoca la percepción de lo global en detrimento de la del detalle.

### Método

A 39 estudiantes de tercer semestre de bachillerato tecnológico se les aplicaron dos cuestionarios, que denominamos CI y CE. Para informar de su conocimiento de cinco aspectos de los fundamentos de la recta como lugar geométrico y de su expresión, el cuestionario CI planteó en 10 reactivos preguntas abiertas (véase la Tabla 1). El cuestionario CE se refirió a lo requerido para acceder a la enseñanza del tema: ubicación de puntos en el plano cartesiano,

identificación de la expresión algebraica respectiva y de la pendiente (CE; véase la Figura 1).

Aspecto	Objetivo	Contenido
<b>Relaciones</b> Reactivos 1 y 9	Expresar en forma verbal características implícitas de los ángulos formados por dos rectas perpendiculares, justificar el signo de la pendiente y graficar los cuatro casos.	Rectas perpendiculares, ángulos rectos y su medida, pendiente positiva, negativa, cero e indefinida, plano cartesiano.
<b>Postulado de la Geometría Plana</b> Reactivos 2 y 3	Expresar en forma verbal y gráfica la unidad de “por un punto que no pertenece a una recta se puede trazar una y sólo una recta perpendicular” y un procedimiento para construir la perpendicular.	Notación (para identificar a los objetos geométricos), circunferencia, semejanza o triángulo isósceles, perpendicularidad, distancia. Pertenencia a un objeto.
<b>Distancia</b> Reactivos 4, 5 y 6	Nombrar en forma verbal la “longitud de un segmento” en diferentes situaciones. Usar los reactivos 4 y 5 para expresar en forma verbal o gráfica cómo es la distancia entre dos rectas paralelas y justificar su descripción.	Notación, perpendicularidad, longitud de un segmento, intersección, paralelismo, distancia entre paralelas, distancia de un punto a una línea recta. Pertenencia a un objeto.
<b>Producto cartesiano</b> Reactivos 7 y 8	Expresar en forma gráfica la correspondencia entre los puntos del plano y sus pares ordenados. Expresar en forma simbólica (a) las coordenadas de un punto, (b) de un cociente, de la tangente de un ángulo y concluir que son iguales.	Notación, plano cartesiano, distancia, coordenadas, línea recta en el plano cartesiano, razón, pendiente, función trigonométrica, perpendicularidad.
<b>Expresión gráfica, escrita y simbólica</b> Reactivo 10	Expresar en otras dos formas equivalentes expresiones de forma simbólica, gráfica o verbal.	Conjunto, ordenada y abscisa, distancia, regiones y rectas en el plano cartesiano, desigualdad, notación $P(x, y)$ , polígono y vértices.

Tabla 1. Caracterización del cuestionario CI.

Los cuestionarios se presentaron impresos en papel para su contestación individual manuscrita, en a lo más 55 minutos, a la hora de la clase de matemáticas. Por sus respuestas al cuestionario CI y su disposición a participar, se entrevistó a dos estudiantes individualmente, con formato semiestructurado, para profundizar en su comprensión de conceptos del tema de interés. Las entrevistas, videograbadas y transcritas, duraron 1 hora, se realizaron en cámara Gesell y el entrevistado escribió en papel con lápiz lo que requirió para contestar.

### Las entrevistas

El objetivo de las entrevistas fue informar acerca de contestaciones particulares al cuestionario de dos de los estudiantes. Para la primera entrevista se consideraron los reactivos 2, 3, 8 y 9, y se refirió a establecer la correspondencia entre un punto y sus coordenadas no numéricas (representantes genéricos), diferenciar entre línea recta y segmento, dar cuenta de la inclinación de una línea recta y cuantificar su pendiente. Todo el planteamiento se refirió al plano cartesiano.

Para la segunda entrevista se consideraron los reactivos 3 y 5, y se refirió a precisar, geoméricamente, la “distancia entre un punto y una línea recta” (se consideró la distancia entre un punto dado y un punto sobre la línea recta, o sea la distancia entre dos puntos), a dar cuenta de las características del plano cartesiano, a la construcción de la línea recta perpendicular dados un punto y una línea recta que no lo contiene.

### El cuestionario CE

Tres aspectos se consideraron en el cuestionario CE para identificar el perfil de los estudiantes previamente a la enseñanza de la recta en el plano cartesiano. Esos aspectos fueron: identificación de la expresión algebraica de la recta y de su pendiente; ubicación de puntos en el plano cartesiano y las expresiones verbal, gráfica y simbólica de la recta.

La Figura 1 presenta los reactivos del cuestionario CE.

<p>1) Localiza en el plano cartesiano los puntos <math>A(-3, 0)</math>, <math>B(\frac{1}{2}, -1)</math></p> <p>2) Traza el lugar geométrico de la siguiente ecuación: <math>y = -x + 3</math></p> <div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 100%; text-align: center; background-color: #f0f0f0;"> </div> <p>3) ¿Con qué letra simbolizas la pendiente? _____</p>	<p>4) Subraya la ecuación cuyo lugar geométrico es una recta:</p> <p style="text-align: center;"><math>Y = X^2 - 9</math>      <math>3x - 5y + 12 = 0</math>      <math>X^2 - Y^2 = 4</math></p> <p>En la ecuación <math>y = -3x + 7</math>:</p> <p>5) ¿Cuál es el valor de la pendiente? _____</p> <p>6) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen? _____</p> <p>Para la recta que pasa por los puntos A (1, -2) y B (-1, 4):</p> <p>7) Determina el valor de su pendiente _____</p> <p>8) Determina la ecuación de la recta en su forma general: _____</p> <p>9) Determina la ecuación en su forma ordenada en el origen: _____</p> <p>10) Si la abscisa vale cero, ¿cuánto vale la ordenada en esta ecuación? _____</p>
---	---

Figura 1. Presentación del cuestionario CE.

### Resultados de investigación

Para el análisis de los datos obtenidos con los instrumentos de investigación aplicados se consideraron los procedimientos exhibidos por los estudiantes y sus formas de expresión.

### Cuestionario CI

La Tabla 2 resume los datos de contestación correcta a los reactivos del instrumento.

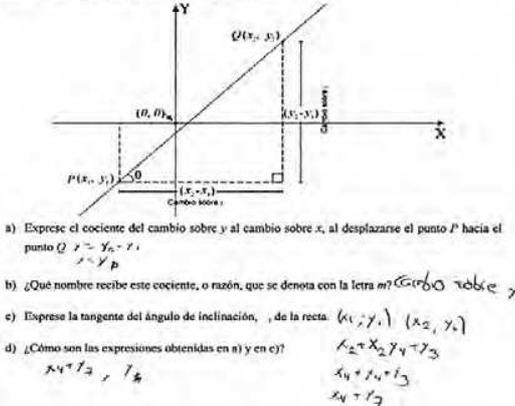
Reactivos	Postulados de Geometría	Producto Cartesiano	Distancia	Relaciones	Expresiones: verbal, gráfica y simbólica	Máximo % de resp. correctas
1						23%
2, 3						2.6%, 0%
4, 5, 6						0%, 0%, 13%
7, 8						21%, 0%
9						5%
10						13%

Tabla 2. Resultados generales de la aplicación del cuestionario CI.

No obstante que la educación secundaria introduce los temas del plano cartesiano, de la recta y de su expresión simbólica, y que esta última vuelve a ser tema de estudio en el primer semestre del bachillerato tecnológico en la unidad de aprendizaje de Álgebra, el desempeño general del grupo de estudiantes fue muy deficiente.

Para cuatro reactivos (3, 4, 5 y 8) no se obtuvo una sola respuesta correcta. Solamente 40% de los estudiantes identificaron las coordenadas de puntos en el plano cartesiano, pero ninguno advirtió en el reactivo 8 una expresión gráfica de la constancia de la razón de cambio en y al cambio en x como la pendiente de una recta (véase la Figura 2); incluso, no reconocieron la correspondencia entre la gráfica y la expresión verbal, escrita, *cociente del cambio sobre y al cambio sobre x al desplazarse el punto P hacia el punto Q*.

8. Respecto a la figura siguiente:



8. Respecto a la figura siguiente:

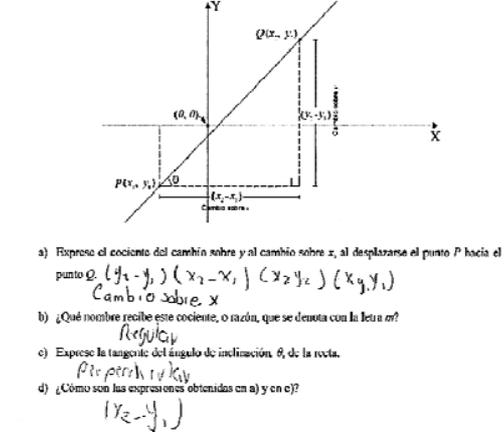


Figura 2. Pendiente en el reactivo 8: dos casos.

Los estudiantes no pudieron referirse a lugares geométricos sencillos en el plano cartesiano de forma verbal, ni gráfica ni simbólica. Ningún estudiante logró describir el procedimiento para trazar una perpendicular a una recta que pase por un punto que no pertenezca a ella.

9. ¿Por qué las pendientes de las rectas son positivas, negativas, cero o indefinidas?

Represente geoméricamente cada uno de los casos anteriores.

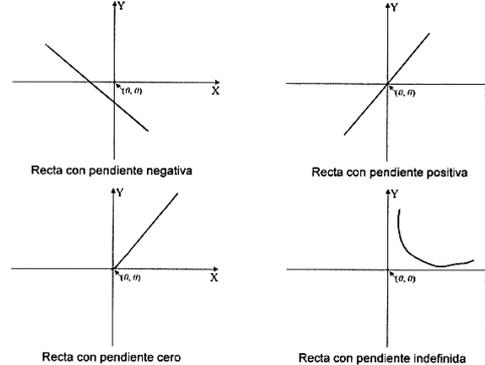


Figura 3. Tipos de pendientes: respuestas de un caso típico del grupo.

Dado un sistema coordenado cartesiano en el reactivo 9, ningún estudiante identificó una pendiente indefinida, sólo 5% a una pendiente 0 y 11% a pendientes distintas de 0 (véase la Figura 3). Los trazos de los estudiantes meramente revelaron la prevalencia del plano cartesiano como fondo, de sus regiones como un todo y del origen, sin dar sentido incluso al tipo de objeto (recta) cuyo trazo se solicitó en cada caso. Esto concuerda con lo indicado por Pomerantz (1985) y coincide con lo señalado por Acuña (2006).

#### Las entrevistas

Los interrogatorios realizados reafirmaron la necesidad de insistir en el carácter infinito de la recta, de considerar la rotación de los ejes del sistema coordenado de referencia para desactivar el anclaje a la horizontal al considerar rectas en general, de hacer énfasis en la identificación de la pendiente de una recta cualquiera. Más aún, incluso para conceptos que se introdujeron desde la escuela primaria, se requiere promover la expresión oral del estudiante para que los dote de sentido ante una presentación figural o gráfica, o simbólica, y viceversa.

En los pasajes transcritos que citamos, I denota la intervención del investigador y E<sub>1</sub> la del estudiante entrevistado. El siguiente se refiere al reactivo 3 para el que no se obtuvo una sola respuesta correcta:

<p>3. Describe el procedimiento para construir una recta perpendicular a L que pase por el punto Q.</p> <p>Será trazar de unir los puntos con las graficas y coordenadas de puntos correctos para llegar al triángulo.</p>  <p>Figura 4. Descripción de la construcción</p>	E <sub>1</sub>	Perpendicular es cuando se cruzan dos rectas.
	I	Traza dos rectas paralelas.
	E <sub>1</sub>	¿Paralelas? ... Serían [traza dos segmentos de recta paralelos].
	I	¿Esas dos líneas qué cumplen?
	E <sub>1</sub>	Que tienen que estar ... este ... a la misma distancia.
	I	¿Y las perpendiculares qué deben cumplir?
E <sub>1</sub>	Que formen ángulos de 90°.	

Durante el interrogatorio se revelaron confusiones entre objetos geométricos y las magnitudes numéricas de sus dimensiones:

I	¿Esas dos cosas se llaman... eso último que acabas de trazar se llaman...
E <sub>1</sub>	Segmentos.
I	Segmentos. ¿Me puedes decir cómo son sus longitudes?
E <sub>1</sub>	O sea ...
I	¿Cómo son? ¿Cómo son? ¿Qué es la longitud?
E <sub>1</sub>	La longitud es lo que mide...
I	Tú,... así, a simple vista, me puedes decir ... este ... ¿cómo son?

- E<sub>1</sub> Son paralelas, ¿no?. O...
- I ¡No!, sus longitudes. ... ¿Qué es la longitud?
- E<sub>1</sub> Es lo que mide.
- I Lo que mide. ¿Eso puede ser paralelo? O sea, lo que mide ¿puede ser paralelo?
- E<sub>1</sub> Pues sí.
- I ¿Por qué?
- E<sub>1</sub> Porque .....
- I A ver, dime la medida de uno de ellos.
- E<sub>1</sub> Cinco.
- Cinco. Y, ¿de la otra [se refiere a la longitud del otro segmento]?
- E<sub>1</sub> Pues, igual, cinco.
- I Bueno, [pero] ¿cómo puedo decir que dos números son paralelos? O ¿por qué? ¿Qué me permite decir eso?
- E<sub>1</sub> Porque son iguales, o sea...
- I ¡No, son iguales!
- E<sub>1</sub> Bueno, la cantidad que es sí, pero..., o sea...
- I ¿Qué puedo decir de dos números? Por ejemplo, o sea, más ó menos .... Yo te doy dos números, o pienso dos números y tú me puedes decir “esos números son ...” ¿Qué son? ¿Cómo son?
- E<sub>1</sub> Son... este...
- I ¿Cómo pueden ser esos números? O sea, por ejemplo,... no te fijas en cuáles son los números... el tres y el once, por ejemplo. ¿Cómo [son]?... ¿Qué me puedes decir de ellos?... ¡Pero al compararlos,... no verlos individualmente!
- E<sub>1</sub> Que son...
- I ¿Son iguales los números?
- E<sub>1</sub> No.
- I No, ¿verdad? ¿Cómo me podrías decir que no son iguales?
- E<sub>1</sub> Que... son... de diferentes tamaños. Bueno, tienen valor distinto.
- ...
- I Y los números, ¿cómo son entre sí?
- E<sub>1</sub> Altos y bajos.
- I No se usa[n] esa[s] palabra[s] de “altos” y “bajos”. Sino que... uno es más ¿qué...?
- E<sub>1</sub> El otro. Es mayor que él.
- I ¿Es mayor que! Entonces, ¿te fijas? Lo que vamos a comparar aquí no son los objetos, van a ser sus longitudes.

La experiencia de la construcción de figuras geométricas con regla y compás se reveló inexistente (véase la Figura 5).

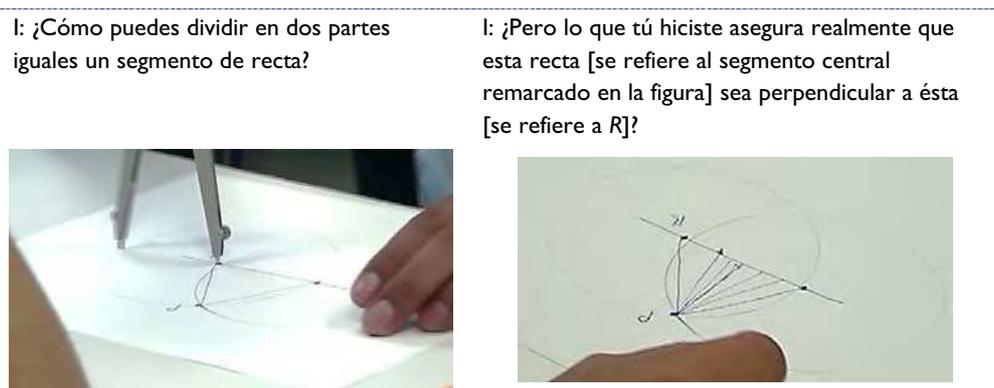


Figura 5. Construcciones propuestas para llegar a la de la perpendicular.

Sin embargo, durante la entrevista se evidenció la bondad de la construcción sólo con regla y compás para favorecer el razonamiento geométrico, mediante la articulación de la descripción de procedimientos para identificar propiedades de lugares geométricos.

- I ¿En dónde crees... que deba de colocar... el segmento, o cómo debo trazar el segmento... para que... sea el de menor longitud [se refiere al segmento central remarcado en la figura en comparación con los otros trazados desde el punto  $P$  hacia la recta  $R$ ]?
- E<sub>1</sub> Que sea el de menor ...
- I Sí.
- E<sub>1</sub> Al centro... o sea...
- I ¿Al centro de quién?
- E<sub>1</sub> De la recta. Bueno, hay ... partir de ... sí, hacerlo de forma, en este caso, vertical. A donde...
- I Vertical. ¿Qué significa así, "vertical"?
- E<sub>1</sub> Parado, se puede decir. O sea, ¿cómo le digo ...? Sí, supongamos, del punto donde es... al... No, pero de esta forma quedaría... Porque si es de otra...
- I Tú dices vertical, ¿pero por qué vertical? O sea... No, no me queda claro, ¿por qué vertical?
- E<sub>1</sub> Porque, o sea, entre ..... O sea vertical, porque... es la menor porque... o sea, como no llega al ... a la recta, se puede decir... Ya, conforme a eso, ya podría ser... conforme se va abriendo, se puede decir, se van haciendo los segmentos más grandes [señala a los otros segmentos trazados desde el punto  $P$  hacia la recta  $R$  a uno y otro lado del central en la figura (véase la Figura 5)].

Finalmente, el estudiante logró realizar y describir el procedimiento para dividir un segmento de recta en dos partes iguales.

### Resultados de indagación: Cuestionario CE

La Tabla 3 resume los porcentajes de respuestas correctas al cuestionario CE. Los estudiantes sólo poseían los conocimientos elementales para localizar puntos en el plano cartesiano; 70% no contestó las preguntas relativas a la gráfica para el lugar geométrico. El desconocimiento de

las expresiones simbólicas fue casi total, pues un prorrateo entre los tres reactivos más representativos de ese aspecto (3, 5 y 6) indicó sólo 14% de respuestas correctas. Finalmente, la falta de competencias relativas al Álgebra requeridas (reactivos 7, 8 y 9) se manifestó con cero respuestas correctas o con sólo una (reactivo 10).

Reactivos	Lugar geométrico y la recta	Producto Cartesiano	Expresiones:			Máximo % de resp. correctas
			verbal	Gráfica	Simbólica	
1						73%
2						27%
3						11%
4						43%
5, 6						14%, 24%
7						0%
8, 9						0%, 0%
10						3%

Tabla 3. Resultados generales de la aplicación del cuestionario CE.

Por tanto, se concluyó un estado de conocimientos generales del grupo muy deficiente previo a la enseñanza del tema de interés.

### Conclusiones

Los resultados de la investigación de la comprensión de los estudiantes de los fundamentos necesarios para acceder al estudio del tema de la recta en el plano cartesiano, coincidentes con los de la indagación que efectuó la docencia acerca de la comprensión de los estudiantes de los requerimientos para someterlos a la enseñanza respectiva, indican condiciones desfavorables no sólo para el logro de los resultados de aprendizaje esperados de la enseñanza de la recta, sino en general de los de la unidad de Geometría Analítica en el bachillerato tecnológico. Las deficiencias provienen no sólo de la educación básica, sino también de las unidades de aprendizaje de Álgebra y de Geometría y Trigonometría de los dos semestres previos al de interés aquí. Estos resultados demandan estrategias de enseñanza informadas puntualmente del estado inicial del conocimiento de los estudiantes, a fin de subsanar las insuficiencias que auguran el fracaso del proceso de la educación matemática. De igual forma, se impone un examen de la articulación con el nivel básico de educación para una formación matemática efectiva, continua e integral.

### Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes

- cartesianos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 215-236). México: Santillana-Cinvestav.
- Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.
- Martínez, R.; Mendoza, F.; Garnica, I.; Chávez, H. y Ojeda, A.M. (2012). Conocimiento adquirido y el círculo trigonométrico: implicaciones para el bachillerato tecnológico. R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 131-140. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa.
- Pomerantz, J. R. (1985). Perceptual organization in information processing. In A.M. Aitkenhaid and J.M. Slack (Eds), *Issues in cognitive modeling* (pp. 127-158). New Jersey: Erlbaum Associates.
- SEMS-SEP. (2008). *Reforma integral de la Educación Media Superior en México: La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. México: SEP. Recuperado el 28 de noviembre de 2011 de [http://www.profordsc.fie.ipn.mx/profordsc3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema\\_Nacional\\_Bachillerato.pdf](http://www.profordsc.fie.ipn.mx/profordsc3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema_Nacional_Bachillerato.pdf).