

UNA DESCOMPOSICIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA: UN MODELO COGNITIVO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO

Cristóbal Valdivia Sepúlveda, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
cristobal.matematico@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Chile

Resumen. El propósito del presente reporte es dar a conocer los resultados de la elaboración de una Descomposición Genética, sobre el concepto de la Regla de la Cadena, a partir de la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y la Triada de Piaget y García (Piaget y García, 1989): Intra, Inter y Trans. La estructura general del estudio está basada en el ciclo de investigación que contiene la teoría: Análisis teórico; Diseño y aplicación de instrumentos; Análisis y verificación de datos. En el segundo de estos componentes se diseñó y aplicó un cuestionario y también una entrevista a once estudiantes de una Universidad chilena. Los resultados obtenidos dan cuenta de los constructos necesarios que un aprendiz muestra en relación al concepto Regla de la Cadena.

Palabras clave: regla de la cadena, teoría apoe, descomposición genética

Abstract. The purpose of this report is to present the results of the development of a genetic decomposition, on the concept of the chain rule, from Theory APOS (Action, Process, Object and Schema) and the triad of Piaget and García (Piaget and García, 1989): Intra, Inter and Trans. The general structure of the study is based on the research cycle that contains the theory: theoretical analysis, design and implementation of tools, Analysis and verification of data. In the second of these components are designed and implemented a questionnaire and an interview with eleven students from a Chilean university. The results obtained show the necessary constructs that an apprentice takes on the concept of the Chain Rule.

Key words: chain rule, theory apos, genetic decomposition

Introducción

Nuestro objeto de estudio se sitúa en el cálculo diferencial que incluye un sin fin de conceptos que se convierten en herramientas –que utilizan los aprendices– para resolver situaciones problema: máximos y mínimos, zonas de crecimiento y decrecimiento de funciones, razón de cambio, entre otras. En todos ellos surge un denominador común para dar respuesta a dichos problemas, el concepto de la Regla de la Cadena, como un constructo necesario y fundamental.

Diversas investigaciones realizadas en torno a la Regla de la Cadena han identificado dificultades en su aprendizaje: respecto de la simbología presente en la definición (Horvath, 2008 y Kabeal, 2010); una instrumentalización de esta regla (Jojo, Brijlall & Maharaj, 2010); débil comprensión de la composición de funciones como elemento clave en el aprendizaje de la Regla de la Cadena (Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St. John, Tolia & Vidakovic, 1997 y Cottrill, 1999).

En base a nuestra experiencia como docentes en cursos de cálculo diferencial, en la enseñanza superior, hemos podido apreciar que la Regla de la Cadena es aprendida de manera mecánica, de memoria, es decir, los estudiantes utilizan un algoritmo para poder derivar funciones que correspondan a una composición entre dos o más funciones. Este algoritmo, según las propias palabras de nuestros estudiantes, se aplica “*derivando*” desde la función que está más “*afuera*” y, *posteriormente, continúan con aquella que está “dentro” de la función recién derivada.* Veamos un ejemplo.

Consideremos la función $f(x)=(2x^3-4x)^2$, entonces los estudiantes comienzan derivando el exponente 2 que está “*afuera*” de $2x^3-4x$, obteniendo $2(2x^3-4x)$. A esta última expresión multiplican la derivada de lo que está “*dentro*” de f , es decir $6x^2-4$, obteniendo –a través del producto de ambas expresiones– finalmente:

$$f'(x) = 2(2x^3 - 4x)(6x^2 - 4)$$

Consideramos que esta manera de mirar la derivada de una función compuesta, le entrega un valor puramente mecánico e instrumental a la Regla de la Cadena. Se pierde, entonces, consciencia de la poderosa herramienta que representa para ser utilizada, por ejemplo, en la resolución de problemas –tal como lo mencionamos anteriormente–. No existe, además, reflexión en la manera en que varios conceptos (composición de funciones, derivadas, funciones) se van integrando en esta regla que permite derivar funciones compuestas.

Cabe destacar que nuestra investigación aún se encuentra en desarrollo, y en este artículo se presentan los resultados que arrojaron los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario. Según este contexto nos hemos planteado dos preguntas que guían nuestra investigación: ¿Cómo abordan los aprendices el concepto de la Regla de la Cadena? y ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje de ésta?. En la búsqueda de posibles respuestas, nos propusimos dos objetivos generales de investigación: primero indagar en las construcciones mentales que puede utilizar un estudiante como estrategia cognitiva para construir el concepto Regla de la Cadena y, segundo, describir y caracterizar los niveles de comprensión que se pueden tener de ella y el paso de un nivel a otro, mediante los niveles de Esquema Intra, Inter y Trans.

Marco teórico: la teoría APOE

La investigación se realiza bajo el alero de la teoría APOE, como marco teórico y metodológico. Por tanto, el estudio es de corte esencialmente cognitivo. Ella emerge como una herramienta que se acopla a la problemática que hemos identificado, debido a que atiende el cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro (ideas obtenidas originalmente de

Piaget), y plantea un modelo que se preocupa de la manera en que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos.

En la construcción de conceptos se pueden observar tres construcciones mentales básicas, que no son –necesariamente– secuenciales: Acción, Proceso y Objeto. La primera de ellas corresponde a “una transformación de un objeto que es percibido, por el sujeto, como algo externo” (Trigueros, 2005, p. 8). Las reacciones que tiene el sujeto son consecuencia de estímulos externos que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer. Los estímulos pueden ser de tipo físico o mental. La segunda construcción mental *proceso* ocurre cuando las acciones se repiten y el sujeto reflexiona, tomando conciencia de ellas. La tercera construcción mental Objeto ocurre cuando se encapsula un Proceso que corresponde:

Quando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces se estará pensando en un proceso como un objeto (Dubinsky, 1996, p. 28)

Es importante mencionar que el modo para pasar de una construcción mental a otra es la *Abstracción Reflexiva*. Esta noción (también recogida de las ideas de Piaget) constituye el mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático y corresponde al proceso mediante el cual un individuo realiza acciones sobre los objetos que son fuente de estudio, y a partir de ello se establecen relaciones o propiedades. El conjunto de acciones a las que nos referimos vienen a constituir los mecanismos mentales: interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación.

En APOE hablamos de la noción de *esquema* que emerge de las ideas piagetianas y corresponde a la “colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática” (Trigueros, 2005, p. 11).

Niveles de esquema

De la noción de Esquema recién entregada se desprende que los esquemas no son estáticos, sino más bien, es una noción que está en constante evolución, dependiendo de las situaciones a las cuales se vea enfrentado un individuo. En la medida que la exigencia conceptual –de un problema– aumente, ocurrirán modificaciones en los esquemas, de modo que permitan dar una respuesta coherente. Por lo tanto, la elaboración de nuestra Descomposición Genética

(DG) que describe en detalle los aspectos constructivos de un fragmento del conocimiento matemático, tendrá incorporada la tríada de Piaget y García (Piaget y García, 1989) que nosotros hemos denominado: Intra-Regla de la cadena, Inter-Regla de la cadena y Trans-Regla de la cadena.

- ❖ *Nivel de esquema Intra-Regla de la cadena:* Se entenderá por la construcción de acciones, procesos y objetos de un mismo concepto, pero de manera aislada. Es decir, no existen relaciones –y si existen, son débiles– entre las construcciones mentales en torno al concepto.
- ❖ *Nivel de esquema Inter-Regla de la cadena:* Lo entenderemos por la existencia de relaciones entre diferentes conceptos relacionados con una misma área de la matemática.
- ❖ *Nivel de esquema Trans-Regla de la cadena:* Se entenderán aquellas relaciones que resultan ser coherentes entre los diferentes conceptos, de manera que puedan ser utilizados para poder resolver alguna situación problema. Lo que caracteriza este tercer nivel de los dos primeros, es la toma de conciencia –que tiene el individuo– para utilizar o no algún esquema.

Ciclo de investigación de APOE

Esta investigación se enmarca en un modelo cognitivo sobre la construcción del concepto Regla de la Cadena, llamada DG (Dubinsky, 1991), que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala et al., 1996): análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos. Estas tres componentes determinan la estructura general de la investigación.

En el proceso de elaboración de la DG de la Regla de la Cadena describimos y caracterizamos las construcciones mentales que consideramos prerrequisitos, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación) mentales empleados, que conforman una vía mediante el cual un estudiante puede construir, de manera adecuada, el concepto que estudiamos. Además, los niveles de la tríada de la construcción de un esquema (Intra, Inter y Trans) permitirán dar cuenta del desarrollo del esquema de esta regla, mediante la descripción de características que definen cada nivel.

Descomposición genética hipotética

La DG que hemos construido (Figura 1) recoge elementos de la DG aportada por Clark y su grupo (Clark, et. al., 1997), que posteriormente fue validada por el estudio realizado por Cottrill (1999). Sin embargo, nuestro aporte al estudio de la Regla de la Cadena será una DG con construcciones mentales que describen un modelo a través del cual un aprendiz puede construir el concepto de estudio. Además, la DG está planteada a partir de la propia matemática, explicitando conceptos –mediante símbolos y signos– que están puestos en juego en la construcción de la Regla de la Cadena.

En la DG que proponemos existen tres conceptos matemáticos fundamentales que la sustentan: función, composición de funciones y la diferenciación. Consideramos que el camino viable para construir el concepto Regla de la Cadena considera, por una parte, una construcción mental Objeto f que corresponde a la compuesta de dos funciones g y h . Este constructo mental se *desencapsula* en los procesos que le dan origen: $X \rightarrow g(x)$ y $X \rightarrow h(x)$. Ellos corresponden a la Descomposición, entendido como el procedimiento *inverso* de componer. Para ello es necesario reconocer que para cualquier elemento del dominio de f , se tiene que: $f(x) = g(h(x))$ y en consecuencia $f = g \circ h$, para todo elemento del conjunto A (nótese que, desde el punto de vista matemático, buscamos obtener la Regla de la Cadena “desmenuzando” la composición de funciones. No comenzamos por componer dos funciones, sino más bien, dado f , se deben encontrar dos funciones – g y h – que compuestas generen f)

Por otro lado tenemos –en la DG– funciones diferenciables como una construcción mental Objeto, que se *desencapsula* en el álgebra de derivadas como un *Proceso*. Posteriormente debe ocurrir una *coordinación* (de las funciones g y h) de los *Procesos* Descomposición y Álgebra de derivadas para obtener un nuevo *Proceso*, $g'(h(x))$. Esto último tiene que ver con evaluar $h(x)$ en la derivada de g .

La construcción mental *Proceso* $g'(h(x))$ se *encapsula* en el *Objeto* Regla de la Cadena a través del producto, obteniéndose $f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$, para todo elemento del Dominio de f .

A partir del Objeto del concepto de la Regla de la Cadena, se describen los tres niveles del desarrollo de un Esquema. A continuación entregaremos características específicas para cada etapa.

Consideraremos que un aprendiz muestra un nivel de Esquema Intra-Regla de la Cadena cuando:

- ❖ Utiliza la Regla de la Cadena como un conjunto de reglas –aisladas– para calcular derivadas de funciones compuestas.
- ❖ Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones compuestas, pero sólo a cierto tipo, sin lograr abarcar la derivada de cualquier función compuesta.

Por otra parte, el nivel de Esquema Inter-Regla de la Cadena está caracterizado por aquellas respuestas y razonamientos que suceden cuando un aprendiz:

- ❖ Utiliza la Regla de la Cadena para derivar cualquier tipo de funciones compuestas.
- ❖ Establece relaciones entre las distintas derivadas de una función compuesta, utilizando cualquiera de las dos notaciones dispuestas para ello (Notación de Leibniz o de composición de funciones).

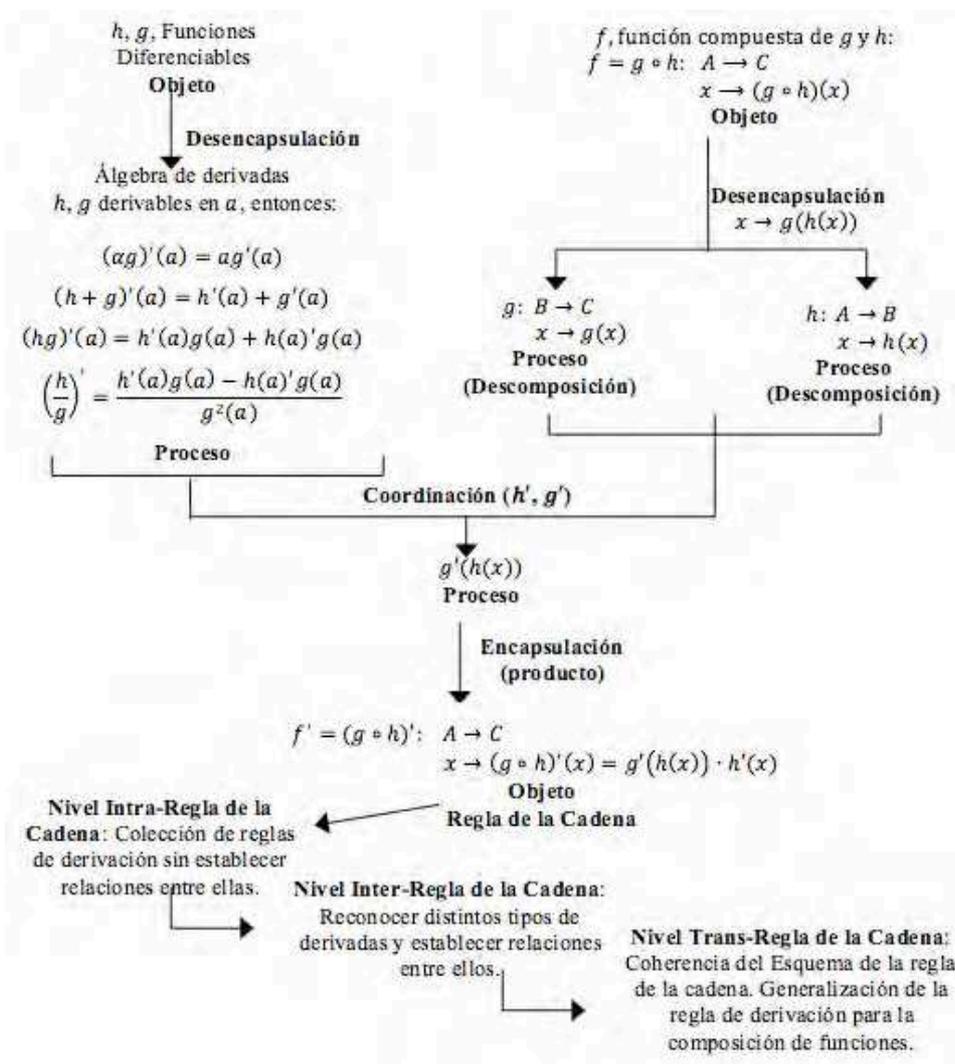


Figura 1: Descomposición Genética Hipotética del concepto Regla de la Cadena

Finalmente, las características que definen el último nivel de Esquema Trans-Regla de la Cadena, están presentes cuando el aprendiz:

- ❖ Reconoce la regla de la cadena no como un conjunto de reglas, sino más bien como una única regla que se aplica a la derivada de funciones compuestas.
- ❖ Considera a la Regla de la Cadena como un todo integrado, que se puede utilizar a cualquier tipo de funciones compuestas.

Diseño y aplicación de instrumentos

En la segunda componente del Ciclo de investigación se elaboró un cuestionario y una entrevista. En esta oportunidad, sólo damos cuenta del cuestionario que se ha aplicado, debido a que la investigación se encuentra aún en curso.

El objetivo que persigue el cuestionario es indagar en las construcciones y mecanismos mentales –presentes en la DG– que consideramos prerequisites para construir el Objeto Regla de la Cadena. La aplicación de este instrumento se realizó a once estudiantes de la carrera Pedagogía en Matemática, de una Universidad de la comuna de Valparaíso, en Chile. La condición para participar voluntariamente del proceso fue haber aprobado algún curso que abordara temas del cálculo infinitesimal, específicamente derivadas.

Algunos resultados

Aún cuando la investigación se encuentra todavía en desarrollo, expondremos, a modo de ejemplo, uno de los resultados que hemos obtenido con la aplicación del cuestionario.

Si ponemos atención a las producciones del estudiante siete (E7) en la pregunta 6 (Figura 2) del cuestionario, podemos apreciar que responde correctamente los cuatro incisos. En el primero de ellos (Figura 3) *desencapsula* la función f en dos construcciones mentales *proceso* –funciones h y g – que al componer generan f . A su vez –para el segundo inciso– estos *procesos* son *coordinados* con otro *proceso* de la derivada, a través de los cuales obtiene $h'(x) = 2$ y $g'(x) = 3x^2$. La coordinación recién mencionada obtiene un nuevo *proceso* de evaluar $h(x)$ en $g'(x)$. Finalmente E7 *encapsuló* este último *proceso* en el *objeto* Regla de la Cadena, a través del producto entre $g'(h(x))$ y $h'(x)$.

6. Considere la función $f(x) = (2x - 3)^3$
 - a) Determine $g(x)$ y $h(x)$ de modo que $(g \circ h)(x)$
 - b) Deje expresado el producto de $g'(h(x))$ con $h'(x)$
 - c) Calcule $f'(x)$
 - d) De b) y c) ¿Podría usted conjeturar algo? Justifique su planteamiento.

Figura 2: Pregunta 6 del cuestionario

c) Calcule $f'(x)$.

$$f(x) = (2x-3)^3 / (1)'$$

$$f'(x) = 3(2x-3)^2 \cdot 2$$

$$h'(x) = 6(2x-3)^2$$

b) Calcule la expresión $g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

$$\Rightarrow g'(2x-3) = 2$$

$$\Rightarrow 3(2x-3)^2 \cdot 2$$

Figura 3: El estudiante siete identifica satisfactoriamente las funciones g y h en el primer inciso (izquierda), y expresa de manera correcta el producto de las derivadas de $g(h(x))$ con $h(x)$, en el segundo inciso (derecha) de la pregunta seis, del cuestionario.

En el inciso c) de la pregunta seis (Figura 4), el estudiante siete calcula la derivada de la función f correctamente para luego, en el inciso siguiente, conjeturar que, para derivar f , se debe derivar una composición de funciones, tal como se puede apreciar en la figura 4. Con ello, E7 ha dejado en evidencia que ha construido el concepto Regla de la Cadena a partir de la derivada de una composición de funciones.

a) $f(x) = (2x-3)^3$
 Sean $g(x)$ y $h(x)$ funciones tales que
 $(g \circ h)(x) = f(x)$
 donde $h(x) = 2x-3$

6. Considere la función $f(x) = (2x-3)^3$

- Determine $g(x)$ y $h(x)$ de modo que $(g \circ h)(x) = f(x)$
- Calcular la expresión $g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- Calcule $f'(x)$
- De b) y c) ¿Podría usted conjeturar algo? Justifique su planteamiento

b) $f(x) = (2x-3)^3$
 Sean $g(x)$ y $h(x)$ funciones tales que

Figura 4: El estudiante siete deriva la función $f(x)$ en el inciso c) (izquierda) y en el inciso d) (derecha) el sujeto concluye la Regla de la Cadena. Pregunta seis, del cuestionario.

A manera de conclusión

En este artículo se propuso una DG del concepto Regla de la Cadena, y las evidencias recogidas hasta ahora muestran que los estudiantes logran construir –por lo menos hasta la construcción mental *objeto*– este concepto a través del modelo que plantea nuestra DG. Logramos observar, además, que algunos estudiantes no tienen una adecuada estructura mental de la composición de funciones. Ello a su vez influye directamente en la dificultad que tuvieron para construir la Regla de la Cadena. Esto implica que la compuesta de funciones y el álgebra de derivadas de funciones corresponden a estructuras mentales prerequisite.

Resultó que las dificultades de los estudiantes no está en componer dos funciones (digamos g y h), sino más bien en encontrarlas, de modo que al componer generen una función distinta (f , de modo que $f = g \circ h$). Desde esa perspectiva, la DG propuesta –en comparación a la elaborada por Clark y su grupo (Clark, et. al., 1997)– proporciona mayor información de las construcciones mentales que podrían ser fortalecidas en los estudiantes, para facilitar la construcción del concepto Regla de la Cadena.

Referencias bibliográficas

- Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education 2*, 1-32. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeCries, D., St. John, D., Tolia, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. En *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345- 364.
- Cottrill, J. (1999). *Students' Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Dubinsky, E (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 25-31.
- Horvath, A. (2008). Looking at calculus students' understanding from inside-out: The relationship between the chain rule and function composition. *Conference on Research in undergraduate Mathematics Education*, San Diego, CA: SIGMAA on RUME.
- Jojo, M., Brijlall, D. & Maharaj, A., (2010). A genetic decomposition of the chain rule: work in progress. *Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education*, (3), 77-82.
- Kabael, T. (2010). Cognitive development of applying the chain rule through three worlds of mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal*, 24(2), 14-28.
- Piaget J. & Garcia R. (1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.) New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1), 5-31.