LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS. SU TRATAMIENTO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Adriana Engler, Alberto Camacho
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral — Argentina
Instituto Tecnológico de Chihuahua II — México
CICATA-IPN
aengler@fca.unl.edu.ar, camachoalberto@hotmail.com

Resumen. En algunos libros de texto habitualmente utilizados para el desarrollo de los programas de Cálculo Diferencial, se enuncia una técnica para calcular la derivada, conocida como la regla de los cuatro pasos. En este trabajo presentamos y describimos el tratamiento de la regla tal como aparece en diferentes textos que se utilizaron o utilizan en carreras de ingeniería en institutos educativos argentinos de nivel universitario y que se encuentran a disposición en las bibliotecas de las diferentes universidades..

Palabras clave: four-steps rule

Abstract. In some commonly used textbooks for the development of differential calculus programs is set out a technique to calculate the derivative known as four-steps rule. We present and describe the treatment of this technique in different books where the rule is used or was used in texts of engineering programs used in different universities, that are available in libraries of different educative institutes in Argentina

Key words: regla de los cuatro pasos

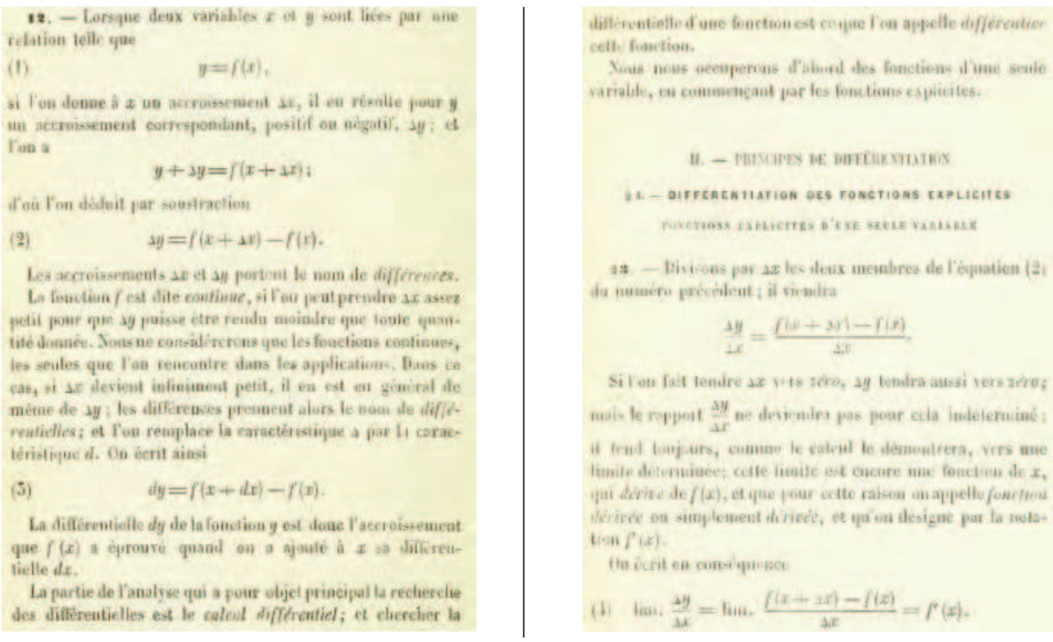
Introducción

En algunos libros de texto habitualmente utilizados para el desarrollo de los programas de cálculo diferencial, en carreras de ingeniería se enuncia una técnica para calcular la derivada conocida como La Regla de los Cuatro Pasos (RCP). En el contexto de la clase de cálculo diferencial los profesores intentamos que los estudiantes operen esta técnica con funciones algebraicas elementales de manera que a través de ella puedan determinar la derivada correspondiente. El proceso algorítmico que subyace a la regla sugiere que los estudiantes asuman una posición de *hacer matemática* en un contexto formal que los lleve a convencerse de la definición a la que conduce, la propia regla, así como, a su vez, convencerse de que las fórmulas de derivación se deducen de esta última. No obstante, el proceso así descrito es del todo monótono y en la práctica se convierte solamente en una rutina que no aloja en la cognición de los estudiantes las coyunturas finas que se desean de la definición de derivada. Por sí misma, la intención de que los estudiantes ejerciten esa técnica es valiosa, siempre y cuando la finalidad se cumpliera, es decir, cuando en la práctica ejercieran o utilizaran con sentido la expresión con la que se define la derivada y no solamente el recurso que la sintetiza como $f'(x)$. Por otro lado, cuando los estudiantes calculan la función derivada, utilizando las reglas de derivación, el proceso de la técnica de los cuatro pasos se deja de lado y la interpretación deseada de la regla también. Este es un primer problema que se vive en la enseñanza de la derivada desde esa perspectiva. La parte algorítmica del proceso se hace cada vez más compleja y necesita así de más trabajo conforme la función algebraica también lo sea. No obstante, la mecanización del álgebra cobra en estos problemas cierta importancia para que los alumnos puedan calcular los límites correspondientes. Consecuentemente, si efectivamente la RCP es importante, a partir de que puede ayudar al profesor en el salón de clase para que sus estudiantes *construyan* la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ incrementando x como $x+\Delta x$, cuya finalidad tendría que ver con un mejor entendimiento de ese concepto. Se hace necesario *dinamizar* dicha regla para hacerla más funcional hacia ese objetivo.

Este trabajo surge en el marco del proyecto de tesis doctoral *Construcción del concepto de derivada a través de dinamizar la regla de los cuatro pasos. Una aproximación socioepistemológica* ante la necesidad de conocer el surgimiento de la regla en los libros de textos y su tratamiento en los libros de uso cotidiano en el aula universitaria.

La regla de los cuatro pasos

La RCP constituye la estructura matemática usada como una *técnica* en el salón de clase para la determinación de la derivada $f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de una función $f(x)$. Fue desarrollada a lo largo de los siglos XVIII y XIX en diversas ramas de la ingeniería, como la topografía, astronomía y otras, apareciendo en los textos de cálculo diferencial desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX, como se puede constatar, por ejemplo, en Sonnet (1869) y en (Granville, 1911).



12. — Lorsque deux variables x et y sont liées par une relation telle que

$$(1) \qquad y = f(x),$$

si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résulte pour y un accroissement correspondant, positif ou négatif, Δy; et l'on a

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

d'où l'on déduit par soustraction

$$(2) \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Les accroissements Δx et Δy portent le nom de *différences*.

La fonction f est dite *continue*, si l'on peut prendre Δx assez petit pour que Δy puisse être rendu moindre que toute quantité donnée. Nous ne considérerons que les fonctions continues, les seules que l'on rencontre dans les applications. Dans ce cas, si Δx devient infiniment petit, il en est en général de même de Δy; les différences prennent alors le nom de *différentielles*; et l'on remplace la caractéristique Δ par la caractéristique d. On écrit ainsi

$$(3) \qquad dy = f(x + dx) - f(x).$$

La différentielle dy de la fonction y est donc l'accroissement que $f(x)$ a éprouvé quand on a ajouté à x sa différentielle dx.

La partie de l'analyse qui a pour objet principal la recherche des différentielles est le *calcul différentiel*; et chercher la différentielle d'une fonction est ce que l'on appelle *différentier* cette fonction.

Nous nous occuperons d'abord des fonctions d'une seule variable, en commençant par les fonctions explicites.

II. — PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION

§ I. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES

FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE

13. — Divisons par Δx les deux membres de l'équation (2) du numéro précédent; il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers *zéro*, Δy tendra aussi vers *zéro*; mais le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne deviendra pas pour cela indéterminé; il tend toujours, comme le calcul le démontrera, vers une limite déterminée; cette limite est encore une fonction de x, qui *dérive* de $f(x)$, et que pour cette raison on appelle *fonction dérivée* ou simplement *dérivée*, et qu'on désigne par la notation $f'(x)$.

On écrit en conséquence

$$(4) \qquad \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim. \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Figura 1. Páginas 4 y 5 del texto de cálculo diferencial del autor francés Sonnet en el que se muestra la utilidad de la RCP en la definición de la derivada de una función.

27. Comparison of increments. Consider the function

(A) $$y = x^2.$$

Assuming a fixed initial value for x, let x take on an increment Δx. Then y will take on a corresponding increment Δy, and we have

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2,$$

or, $$y+\Delta y = x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Subtracting (A), $$y \quad = x^2$$

(B) $$\Delta y = \quad 2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

we get the increment Δy in terms of x and Δx.

To find the ratio of the increments, divide (B) by Δx, giving

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x+\Delta x.$$

Figura 2. Se observa un fragmento de la página 26 del texto de Granville donde se muestran los pasos de cómo se utiliza la regla para determinar la derivada por incrementos de la función $y = x^2$.

The above definition may be given in a more compact form symbolically as follows: Given the function

(A) $$y=f(x),$$

and consider x to have a fixed value.

Let x take on an increment Δx; then the function y takes on an increment Δy, the new value of the function being

(B) $$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

To find the increment of the function, subtract (A) from (B), giving

(C) $$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Dividing by the increment of the variable, Δx, we get

(D) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

The limit of this ratio when Δx approaches the limit zero is, from our definition, the *derivative* and is *denoted by the symbol* $\frac{dy}{dx}$. Therefore

(E) $$\frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x=0}{\text{limit}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

defines the *derivative of* y [*or* $f(x)$] *with respect to* x.

Figura 3. En la página 27 se observan los cuatro pasos para definir la derivada en el mismo libro.

El mismo Granville (1980, p. 30) describe los cuatro pasos de la siguiente manera:

1. *Se sustituye en la función x por* $x+\Delta x$, *y se calcula el nuevo valor de la función* $y+\Delta y$.

2. *Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene* Δy (*incremento de la función*).

3. *Se divide* Δy (*incremento de la función) por* Δx (*incremento de la variable independiente*).

4. *Se calcula el límite de este cociente cuando* Δx *tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.*

Dado que uno de los ejes centrales del proyecto doctoral es la regla, necesitamos conocer cómo aparece en los libros de texto. Es por ello que enseguida iniciamos con la presentación y descripción de su tratamiento en diferentes textos que en los últimos años se utilizaron o utilizan como textos en carreras de ingeniería en universidades argentinas. Distinguimos dos grupos según la manera en la que se presenta.

- Textos en los que se menciona explícitamente la RCP.

Edwards y Penney (1994) trabajan en el Capítulo 1. *Funciones y gráficas,* e inmediatamente, en el Capítulo 2. *Preludio al cálculo,* definen la derivada relacionándola directamente con la pendiente de la recta tangente. La idea de límite la introducen hablando de "posición limite" o bien utilizando la expresión "tiende a". Ya definida la derivada como el límite del cociente de diferencias desarrollan de manera intuitiva e informal (según lo manifestado por los propios autores) el concepto de límite y posteriormente el de continuidad. Recién en el 3. *La derivada,* realizan un estudio más extenso del tema, pero inmediatamente después de formalizar la definición enuncian la regla para calcular una nueva función f', es decir, la derivada de la función original f.

Lial y Hungerford (2000) manifiestan en el prefacio:

> La séptima edición de *Matemáticas para administración y economía* está diseñada para proporcionar los temas matemáticos que necesitan los estudiantes en los campos de negocios, administración, ciencias sociales y ciencias naturales. Hemos tratado de presentar matemáticas sólidas con un estilo informal que insiste en motivación significativa, explicaciones cuidadosas y numerosos ejemplos, centrándonos continuamente en la resolución de problemas del mundo real.

Los autores desarrollan el tema en el Capítulo 9. *Cálculo Diferencial,* y previamente exhiben: fundamentos del álgebra, gráficas, ecuaciones y desigualdades, funciones y gráficas, funciones polinomiales y racionales y funciones exponenciales y logarítmicas. Parten de que la idea clave para el desarrollo del cálculo es el concepto de límite. Buscan examinar el comportamiento de la función cerca de $x = a$ en lugar de ver qué hace en $x = a$. Definen derivada a través de la razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea así como sus relaciones directas con las nociones de velocidad y velocidad instantánea. Después de considerar pendiente de recta secante y pendiente de recta tangente formalizan la definición de derivada. Destacan que la función derivada puede interpretarse de varias maneras y enuncian dos de ellas: como la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x y como la pendiente de la grafica de f en cualquier punto". En las páginas 417 y 418 enuncian la regla práctica para obtener la derivada y muestran un ejemplo.

Tan (2002) llega al tema en el Capítulo 8. *Derivada*, después de trabajar fundamentos de algebra, funciones y sus graficas, funciones lineales y cuadráticas y funciones exponenciales y logarítmicas. Antes de iniciar el tema enuncia:

> En este capítulo se inicia el estudio del cálculo diferencial. Desde el punto de vista histórico, el cálculo diferencial se desarrollo en respuesta al problema de hallar la recta tangente a una curva arbitraria. Pero muy pronto fue claro que al resolver este problema, los matemáticos dispondrían de un método para resolver muchos problemas prácticos relacionados con la razón de cambio de una cantidad con respecto a otra. La herramienta básica utilizada en el cálculo diferencial es la

> derivada de una función. A su vez, el concepto de *derivada* se basa en una noción más fundamental, la del *límite* de una función. (p.491).

Inicia con el tratamiento de la teoría de límites, partiendo de la necesidad de conocer la velocidad que alcanza un tren en un momento determinado. Luego exhibe de manera formal el concepto y establece condiciones para que una función resulte continua. Para introducir el tema derivada retoma el problema del tren, introduce la idea de pendiente, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea. Inmediatamente después de formalizada la definición y su notación, en la página 543 enuncia la regla de cálculo correspondiente. A continuación enuncia numerosos ejemplos, con diferentes grados de complejidad que muestran paso a paso cómo calcular la derivada de una función.

- Textos en los que no se menciona explícitamente a la técnica con el nombre de *regla de los cuatro pasos*, no obstante el proceso algorítmico que plantean para la determinación de la derivada es el mismo que en aquellos autores que así lo consideran.

Piskunov (1970) es un libro considerado "tradicional" para la enseñanza del cálculo y fue utilizado en Argentina durante mucho tiempo como bibliografía básica para el dictado del cálculo diferencial e integral en las diferentes carreras de ingeniería. El autor llega al concepto de derivada en el Capítulo III. *Derivada y diferencial,* después de recorrer el Capítulo I. *Número. Variable. Función* y el Capítulo II. *Límite y continuidad de las funciones.* Sigue un enfoque que distingue claramente definiciones, teoremas y ejemplos. Al comenzar el capítulo trabaja la idea de velocidad del movimiento e inmediatamente llega a la definición de derivada describiendo la técnica utilizada para su cálculo.

Después de revisar el sistema de los números reales, estudiar funciones y límites, Purcell y Varberg (1987) en el Capítulo 3. *La derivada,* abordan el concepto de derivada como solución de dos problemas, el de recta tangente y el de velocidad instantánea. Después de encontrar las formulas para calcular las diferentes reglas prácticas de derivación y en un apartado especial correspondiente a la notación de Leibniz se desglosa de definición de derivada hablando y mostrando los diferentes incrementos y el cociente entre ellos.

Goldstein, Lay y Schneider (1990) en el Capitulo 0. *Funciones* estudian especialmente las funciones y sus gráficas, algunas funciones importantes, el álgebra de funciones, raíces de funciones y finalmente exponentes y funciones de potencia. En el Capítulo 1. *La derivada,* se sigue el siguiente orden: La pendiente de una recta, la pendiente de una curva en un punto y la derivada. En este punto la definición de derivada se da como "la fórmula que da la pendiente de la curva $y = f(x)$ en cualquier punto" y se enuncian algunas reglas de derivación. (pp. 59 – 68). No trabajan hasta ese momento la teoría de límite.

Figura 4. En la página 65 se encuentra un algoritmo que permite calcular $f'(x)$. En su enunciado completo se incluyen los cuatro pasos de la regla.

Para calcular $f'(x)$:

1. Primero calcule $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $h \neq 0$.
2. En seguida haga que h tienda a cero.
3. La cantidad $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tenderá a $f'(x)$.

Introducen el concepto de límite en el apartado 1.4 *Límites y derivada*.

> El concepto de límite es una de las ideas fundamentales del cálculo. De hecho, cualquier desarrollo teórico del cálculo se apoya en una amplia utilización de la teoría de los límites. (…) Como se verá, el concepto de límite permitirá definir la derivada independiente del razonamiento geométrico empleado.
>
> En realidad, ya se ha considerado el límite en nuestra discusión de la derivada, aunque no se uso el término "límite". (p. 68)

Ayra y Larner (1992) realizan el tratamiento de la derivada después de estudiar los siguientes temas: repaso del algebra, ecuaciones de una variable, desigualdades, líneas rectas, funciones y graficas y logaritmos y exponenciales. Para llegar a la definición, trabajan la idea de incrementos y tasas y posteriormente límites (de una manera intuitiva y simple) planteando la necesidad de poder, a partir de conocer la velocidad promedio de un móvil, trabajar la noción de velocidad en un instante o instantánea. De esta manera, los autores llaman derivada de una función a la tasa de cambio instantánea de una función y establecen una definición mas formal (según lo manifiestan) utilizando la idea de límite. Enuncian las diferentes notaciones y en la página 498 resaltan la técnica para el cálculo de la misma.

Wenzelburger (1993) presenta su escrito bajo la consigna de trabajar y mostrar las nuevas tendencias en la Didáctica del Cálculo Diferencial. Su obra está estructurada en dos Secciones: Lectura para los maestros y Actividades para los alumnos. En la sección *alumnos* enuncia una serie de actividades para llegar al concepto de derivada sin conocer la teoría de límites. A modo de introducción en el punto 1.1 *Consideraciones generales,* hace hincapié en "los cambios" y la necesidad de estudiarlos. La autora manifiesta:

> Vivimos en mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios. Justamente esto es el propósito del cálculo diferencial, que *es la matemática de los CAMBIOS*.

> Todo el cálculo diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la *razón de cambio*. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. (p. 33).

En todas las actividades trabaja con el concepto de velocidad para estudiar la razón de cambio.

Figura 5. En la página 49 encontramos, a modo de "técnica" la regla para obtener la derivada.

Usaremos un método de tres pasos que explicaremos mediante el ejemplo de la conocida función $h(t) = 16\,t^2$ (proyecto 4.1).

Paso 1: Encontrar una fórmula para $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, o sea la velocidad (razón de cambio promedio).

Paso 2: Simplificar algebraicamente la fórmula encontrada.

Paso 3: Determinar lo que pasa cuando Δt se acerca a cero.

Thomas y Finney (1998) introducen el tema luego de establecer los números reales, funciones, límite y continuidad de la siguiente manera:

> En el capítulo 1 definimos la pendiente de una curva en un punto como el límite de las pendientes de secantes. Este límite, llamado derivada, mide la razón de cambio de una función y es una de las nociones más importantes del cálculo. …. Encontrar derivadas evaluando límites puede ser laborioso y difícil. En este capítulo se desarrollan técnicas para facilitar el cálculo de derivadas. (p. 109).

La definición es inmediata relacionándola con la pendiente de una curva. En la página 110 describen los pasos para calcularla según la definición y posteriormente detallan paso a paso la resolución de dos ejemplos.

Bittinger (2002) utiliza en el tratamiento de los diferentes tópicos un enfoque intuitivo. Presenta la definición de derivada en el contexto de un análisis de razón de cambio promedio dado que considera que esta forma de presentación es más accesible y realista que la idea estrictamente geométrica de la pendiente. Al definir la derivada enuncia claramente la existencia de tres pasos para calcularla. No habla de la RCP pero se establece concretamente una técnica para el cálculo de la derivada.

De la misma manera Harshbarger y Reynolds (2004), Sadosky y Guber (2004), Simmons (2005), Steiner (2005) y Camacho (2009) utilizan la regla para la definición de la derivada sin mencionarla explícitamente.

Hay tres pasos para calcular una derivada.

1. Escribir el cociente de diferencia $[f(x+h) - f(x)]/h$.
2. Simplificar el cociente de diferencia.
3. Hallar el límite cuando h tiende a 0.

Ejemplo 1 Para $f(x) = 3x - 4$, hallar $f'(x)$.

Solución Se aplican los tres pasos antes señalados, así:

1. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{[3(x+h) - 4] - (3x - 4)}{h}$;
2. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{3x + 3h - 4 - 3x + 4}{h}$

$= \dfrac{3h}{h} = 3, \quad h \neq 0$;

3. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 3 = 3$,

puesto que 3 es una constante.

Por tanto, si $f(x) = 3x - 4$, entonces $f'(x) = 3$.

Figura 6. En la página 128 se observa lo enunciado y un ejemplo

Conclusiones

En la mayoría de los libros analizados, los diferentes tipos de funciones que se plantean aparecen en un orden como el siguiente:

1. Polinomios de la forma: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + r$, para n entero positivo y los coeficientes números reales.
2. Expresiones $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + r$, para n entero negativo, que pueden ser combinadas con el caso anterior.
3. Expresiones que contienen radicales cuyos exponentes son valores racionales de la forma $\dfrac{p}{q}$ positivos o negativos.

En general se deja de lado como ejercicio para los estudiantes la determinación de la derivada haciendo uso de la regla de funciones trascendentes. La técnica es usada de esa manera solamente por los autores de los libros. La parte algorítmica del proceso se hace cada vez más complejo conforme la función algebraica también lo sea, precisando así de más trabajo. Los procesos así desarrollados sirven en consecuencia para demostrar las reglas usuales de derivación. No se aprovecha la regla para trabajar las ideas variacionales que aparecen asociadas con ella.

Referencias bibliográficas

Ayra, J. y Larner, R. (1992). *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. Tercera Edición. Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.

Bittinger, M. (2002). *Cálculo. Para Ciencias Económicas-Administrativas*. Séptima Edición. Colombia: Addison Wesley.

Camacho, A. (2009). *Cálculo diferencial.* España: Ediciones Díaz de Santos.

Edwards, C. y Penney, D. (1994). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Pearson. Prentice Hall.

Goldstein, L.; Lay, D. y Schneider, D. (1990). *Cálculo y sus Aplicaciones.* Prentice Hall Hispanoamericana.

Granville, W. A. (1980). *Cálculo Diferencial* e *Integral*. Primera reimpresión. México: Grupo Noriega Editores, LIMUSA.

Granville, W. (1911). *Elements of the Differential and Integral Calculus.* (Revised Edition) Boston. USA: Ginn and Company

Harshbarger, R. y Reynolds, J. (2004). *Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales.* Séptima Edición. México: Mc Graw Hill.

Lial, M. y Hungerford, T. (2000). *Matemáticas para administración y economía. En las ciencias sociales, naturales y de administración.* Séptima Edición. México: Pearson Educación.

Piskunov, N. (1970). *Cálculo Diferencial* e *Integral.* Barcelona: Montaner y Simon, S. A.

Purcell, E. y Varberg, D. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica.* Cuarta Edición. México.: Prentice Hall.

Sadosky, M. y Guber, R. (2004). *Elementos de Cálculo Diferencial* e *Integral*. 22 Edición. Buenos Aires: Librería y Editorial Alsina.

Simmons, G. (2005). *Cálculo y Geometría Analítica.* 2da edición. México: Mc. Graw Hill.

Sonnet, H. (1869). *Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal a l´usage des Jeunes gens qui ce Destinnent a la Carrière d´Ingénieur*. Hachette: Paris.

Steiner, E. (2005). *Matemáticas para las ciencias aplicadas.* Barcelona: Editorial Reverté.

Tan, S. (2002). *Matemáticas para administración y economía.* Segunda Edición. México: Thomson Learning.

Thomas, G. y Finney, R. (1998). *Cálculo. Una variable.* 9ª Edición. Méjico: Pearson Educación-Addison Wesley Longman.

Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo diferencial.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.