

## TRANSFORMACIONES LINEALES. UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Chile

**Resumen.** El artículo que presentamos a continuación corresponde a una investigación en proceso en didáctica de la matemática relacionada al concepto de transformación lineal; bajo la teoría APOE como marco teórico y un diseño metodológico correspondiente a un estudio de caso múltiple. A partir de esta investigación se obtendrá documentación sobre el esquema del concepto Transformación Lineal reconociendo tres interpretaciones en este, es decir interpretación matricial- interpretación geométrica – e interpretación funcional, las cuales son articuladas por el concepto de combinación lineal, así proponemos una forma para investigar diversos conceptos fundamentales para el álgebra lineal.

**Palabras clave:** álgebra lineal, transformación lineal, apoe

**Abstract.** The article below corresponds to a research process in Didactics of mathematics related to the concept of linear transformation; under theory APOE as theoretical framework and methodological design corresponding to a multiple case study. From this research will provide documentation on the schema of the linear transformation concept recognizing three interpretation in this, i.e. interpretation matrix - geometric interpretation - and functional interpretation, which are articulated by the concept of linear combination, so propose a way to investigate various fundamental concepts for linear algebra.

**Key words:** linear algebra, linear transformation, apos

### Introducción

Nos proponemos investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción y o reconstrucción del concepto transformación lineal; reconoceremos, en el concepto, componentes de origen geométrico, funcional y matricial, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones de una misma definición. La definición del concepto transformación lineal, desde lo que hemos llamado su interpretación funcional, corresponde a: sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un cuerpo  $K$ . La función  $T: V \rightarrow W$  se llama Transformación Lineal de  $V$  en  $W$  si las dos propiedades siguientes son verdaderas para todo  $u$  y  $v$  en  $V$  y para cualquier escalar  $c$  en  $K$ .

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$T(cu) = c T(u)$$

(Larson y Edwards, 2004)

Esta definición planteamos entenderla como una síntesis matemática de la linealidad, que captura en su forma más simple, y restringido a  $R$ ,  $R^2$  y  $R^3$ , que corresponde en cierta forma, a un tipo específico de transformaciones de figuras geométricas; por otra parte esta síntesis con carácter funcional evoluciona convergiendo a las matrices a modo de representación, por lo

que pensamos es apropiado documentar un enfoque enseñanza – aprendizaje globalizador del concepto. Cada interpretación está siendo descompuesta en sus elementos fundamentales y articulados por el concepto matemático de combinación lineal; de esta forma nuestro estudio propone, y basándose en la metodología propia de la teoría APOE, una descomposición genética, DG, del concepto transformación lineal que incorpore las tres interpretaciones del concepto, geométrica – funcional - matricial.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemática para carreras como ingeniería y licenciatura en ciencias; por otra parte existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que poseen los estudiantes para comprender los conceptos relativos al álgebra lineal, por ejemplo Dorier y su equipo de investigadores han logrado establecer un tipo de fenómeno propio del álgebra lineal a través de la descripción del obstáculo del formalismo (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 1997). Por otra parte, según Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis (Dubinsky, Dauterman, Leron, y Zazkis, 1994) el problema central en el aprendizaje de los conceptos en esta materia radica en que, el estudiante debe hacer uso de conceptos abstractos, pero su tendencia es ha trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. Esto pone en tela de juicio el conocimiento alcanzado de la enseñanza de estas materias, y hay quienes piensan que, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos.

En particular sobre el concepto de transformación lineal la documentación hasta ahora obtenida da cuenta que representa un obstáculo mayor; son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado su problemática de aprendizaje, gran parte de las perspectivas sitúan la problemática alrededor del obstáculo del formalismo. Algunas investigaciones de interés sobre el tema; Molina y Oktaç en el 2007, en su estudio llamado “Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico”, recaban evidencias sobre la problemática de aprendizaje del concepto transformación lineal centran su atención desde la perspectiva intuitiva, considerando la teoría sobre la intuición y los modelos intuitivos, el trabajo identifica y determina el grado de interferencia de aquellos modelos que pudieran tener algunos estudiantes, que sustituyen al concepto de transformación lineal, en un contexto geométrico. Bajo la interpretación geométrica encontramos la investigación realizada en el año 2006 por Uicab y Oktaç “Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica”, la investigación da cuenta de la ausencia de razonamiento teórico en los estudiantes, al resolver el problema de extensión lineal, consistente en determinar una transformación lineal por medio de las imágenes de los vectores de una base, el marco teórico utilizado es la aproximación teórica del pensamiento práctico, versus el pensamiento teórico. Ambas

investigaciones recopilan evidencias sobre el aprendizaje del concepto transformación lineal desde una perspectiva que incluye lo geométrico como un camino a la visualización del concepto, concluyendo que persisten los problemas de aprendizaje. En el año 2010, Roa y Okaç, presentan su trabajo; “Construcción de una Descomposición Genética: Análisis Teórico del Concepto Transformación Lineal”, la investigación se sustenta en la teoría APOE proporcionó como resultado de investigación una descomposición genética del concepto, que consideró dos formas de construcción, uno considerando el concepto de función asimilando el concepto de espacio vectorial y la otra donde el concepto transformación lineal es un caso particular del concepto de función, ambas basadas en la interpretación funcional del concepto transformación lineal.

Las investigaciones antes citadas dan cuenta de los problemas de aprendizaje en diferentes aspectos relativos al concepto de transformación lineal, a partir de estas evidencias proponemos una mirada más global al concepto incorporando tres interpretaciones arraigadas a los aspectos: Geométrico- Funcional- Matricial, dichas presentaciones estarán articuladas por el concepto de combinación lineal, esta hipótesis se sustenta en que el álgebra lineal posee dentro de sus orígenes epistemológicos una componente geométrica, y una fuerte componente teórica que la enriquece, con un carácter globalizador.

Es desde una perspectiva cognitiva que pretendemos abordar la problemática y algunas de las preguntas que proponemos como una forma de aproximación a esta son: *¿Es posible que incorporando diferentes interpretaciones del concepto transformación lineal, se logre un aprendizaje más completo? y ¿Es posible que al considerar aspectos globales del concepto transformación lineal, podamos modelar de mejor forma el comportamiento del obstáculo del formalismo?* Por otra parte *¿Cuáles son las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para comprender el concepto de transformación lineal?* La problemática a tratar, a pesar de tener componentes epistemológicos involucrados, son los factores de tipo cognitivo los que predominan, por lo que una propuesta del tipo cognitiva es apropiada para desarrollar la investigación.

Los datos proporcionados por las diferentes investigaciones en el área señalan incuestionablemente que las transformaciones lineales son un tema cuyo aprendizaje decididamente no se logra, por lo general en los cursos de álgebra lineal; pensamos que una aproximación adecuada y completa proviene de los estudios que ha realizado el grupo RUMEC, entre otros.

Planteamos que la dificultad del problema está en comprender el objeto matemático en su totalidad; la que involucra aspectos geométricos- funcionales y matriciales. Como hemos mencionado algunos de estos aspectos han sido abordados, por ejemplo; en el año 2010, Roa y

Oktaç investigaron el concepto transformación lineal en su interpretación funcional, por otra parte, la interpretación geométrica del concepto aparece reportada por Molina y Oktaç en el año 2007. Sobre Documentación relacionada con el concepto transformación lineal en su interpretación matricial existen escasos reportes explícitos sobre la forma en que esta versión es aprendida por los estudiantes. Por lo que hemos priorizado dentro de las etapas de investigación esta interpretación del concepto.

Nuestra hipótesis de trabajo es que el aprendizaje (la construcción) del concepto transformación lineal se alcanza de forma más completa, si se transita entre lo práctico y lo teórico, considerando a la componente geométrica como una forma de visualización de la transformación lineal, de modo que el estudiante tenga la oportunidad de recurrir primero a su conocimiento ingenuo, no formal, de graficación y luego, en un ambiente más conocido, preocuparse de la buena definición de la interpretación funcional de transformación lineal, para poder alcanzar de forma eficaz a la interpretación matricial de la transformación lineal, la cual constituye su forma más eficiente de presentación.

### El marco teórico APOE

Hemos decidido hacer uso de la teoría APOE como sustento teórico para determinar las construcciones mentales necesarias para construir un esquema del concepto de transformación lineal en tres interpretaciones. Pensamos que este marco teórico proporciona el tipo de evidencias necesarias para el logro de los objetivos de esta investigación. A continuación describiremos las componentes generales de la teoría.

La teoría APOE, fue creada por Dubinsky (1991), y sus fundamentos se encuentran en la teoría Piagetana sobre la construcción del conocimiento, APOE asume el concepto de *abstracción reflexiva* de Piaget, el cual originalmente propone describir el desarrollo del pensamiento lógico infantil, pero en la teoría APOE se extienden los alcances de la abstracción reflexiva para comprender el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Dubinsky de esta forma utiliza la idea *abstracción reflexiva*, dada por Piaget, para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado, bajo la hipótesis que *“el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas”* (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

El propósito central de Dubinsky con esta teoría es *entender cómo las matemáticas se aprenden*, bajo el supuesto que las nociones claves que construyen el conocimiento están, las de "acción, objetos, procesos y esquemas" (APOE).

Una acción es cualquier transformación física o mental de un objeto para obtener otro objeto, cuando el sujeto reflexiona sobre una acción, él puede comenzar a establecer un control consciente sobre ésta. Entonces la acción es interiorizada y ésta se convierte en un proceso. Se define un objeto a partir de la encapsulación de uno o varios procesos. Un objeto puede ser des encapsulado para obtener un proceso del cual surgió. Finalmente, la noción de esquema se adopta e interpreta como una colección coherente de objetos y procesos y otros esquemas.

Los esquemas son las construcciones más complejas que podemos determinar de un fragmento de conocimiento matemático, al mismo tiempo, son estructuras inacabadas que evolucionan por la asimilación de un nuevo objeto y la acomodación de las estructuras por las nuevas relaciones que entabla el objeto. Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular.

Es el propósito de esta tesis dar cuenta de la evolución de los esquemas inmersos en el concepto transformación lineal, desde una perspectiva que integra tres esquemas que coordinados proponen dar luces del esquema que corresponde al concepto de transformación lineal; como hemos mencionado hasta ahora los reportes existentes sobre el tema han tratado parcialmente estos esquemas y las aproximaciones desde la teoría APOE para el concepto de transformación lineal consideraron la documentación desde la perspectiva funcional del concepto.

### Diseño metodológico

Esta investigación propone comprender los procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios. Particularmente, nos interesa describir los mecanismos y las construcciones mentales que un estudiante realiza para aprehender el concepto de transformación lineal; para ello, se utilizará la teoría cognitiva APOE (acción-proceso-objeto-esquema), la cual posee su ciclo de investigación, el cual nos proporcionara evidencias empíricas de aquellos mecanismos y construcciones. Como es sabido, las estructuras mentales que un individuo ha desarrollado previamente determinan la construcción de nuevos conceptos, en particular, los matemáticos. Para examinar estos procesos pensamos se requiere de registros de observación de discursos, que permitan el análisis de los actos y procedimientos que son realizados por los estudiantes, por lo que una aproximación adecuada es el estudio de casos múltiple.

### Estudio de casos múltiple

Consideramos pertinente utilizar un diseño metodológico de estudio de casos múltiple, pues son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo. Por otra parte es preciso dejar en claro que nuestras conclusiones provendrán de la teoría APOE.

Las unidades de estudio serán alumnos universitarios que hayan finalizado exitosamente el curso de álgebra lineal de carreras como: ingeniería, licenciatura en ciencias y pedagogía en matemática; en cuyo avance curricular no hayan reprobado las asignaturas de álgebra básica y cursen a lo sumo el sexto semestre de su primera carrera, para descartar en lo posible que sus construcciones mentales se limiten acciones y/o procesos. Por otra parte se considera un número similar de mujeres y de hombres, para evitar sesgos indebidos en el estudio.

A cada uno de los casos de estudio se aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como Descomposición Genética, DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos. Una DG propiamente tal es el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de ese ciclo, que permite documentarla con los datos empíricos.

Por otra parte se trabajará con una unidad de análisis que se determinara, atendiendo a los criterios antes mencionados y se diseñarán registros de observación y protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabarán. Ver tabla I donde se resume la información.

	Caso1	Caso2	Caso3
Tipo de estudiante	Ingeniería Civil	Licenciatura En ciencias	Pedagogía En matemática
Estudiante Universitario que cursa- o ha cursado álgebra lineal	Questionario (1) Entrevista(3) Registros de observación(3)	Questionario (1) Entrevista(3) Registros de observación(3)	Questionario (1) Entrevista(3) Registros de observación(3)

Tabla I

Como este ciclo de investigación propio de la teoría facilita documentar mediante una descripción detallada y próxima la construcción de los conceptos matemáticos que realizan los estudiantes; suponemos que la investigación proveerá, además, de elementos para una comprensión más acabada de conceptos involucrados o subyacentes al de transformación lineal, como son los de isomorfismo, y también acerca del concepto de diagonalización, utilizado en diversas ramas de la Matemática.

### Resultados esperados

Aportar a la didáctica de la matemática información clara y precisa sobre la forma en que los estudiantes construyen el concepto de transformación lineal y los conceptos subyacentes a él, estableciendo un sustento teórico que permitirá la reproducibilidad de los resultados.

Ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas que contribuyan a la descripción de los mecanismos mentales utilizados para el aprendizaje del concepto transformación lineal entendido este como una triada de complejidades geométricas- funcionales y matriciales; teniendo como marco teórico referencial la teoría APOE, desde la cual es posible elaborar un programa de auto-evaluación docente, proponer la realización de Seminarios de docencia con el propósito de comunicar los resultados.

Publicar y difundir la forma los resultados de esta forma de aproximación a los conceptos referidos al álgebra lineal.

Aportar a la didáctica del álgebra lineal una forma para estudiar el comportamiento del fenómeno del formalismo desde la teoría APOE como eje fundamental; por medio de la integración de múltiples interpretaciones de los conceptos, estas (interpretaciones) serán determinadas por los investigadores basados en la epistemología propia de los conceptos y que deberían ser articulados por conceptos basales y propios de la teoría.

### Trabajo avanzado

En relación al trabajo avanzado hemos considerado pertinente presentar dos aspectos en desarrollo de la investigación, el primero se relaciona con la recopilación de antecedentes sobre investigaciones y/o publicaciones referidas a las dificultades de aprendizaje del concepto transformación lineal; el segundo aspecto que determinamos importante es el objeto matemático en el estudio, y para complementar esta mirada se realizó una revisión de textos de álgebra lineal de donde se obtuvo información acerca de la forma de presentación del concepto. Por otra parte se han construido dos descomposiciones genéticas hipotéticas, una sobre la interpretación matricial del concepto transformación lineal y otra sobre la interpretación funcional del concepto, la cual no responde a los supuestos propuestos por

Roa; los reportes de estos avances serán publicados prontamente. Para finalizar formularemos algunas nociones generales sobre el elemento articulador.

Para la interpretación matricial hemos desarrollado una investigación que estudió las construcciones mentales para la reconstrucción del Teorema del Cambio de Base para Vectores (TCBV), se logró documentar las dificultades que los estudiantes poseen en la reconstrucción del TCBV; en concreto se detectó dificultades en la coordinación de los procesos de construcción de la matriz de coordenadas y del teorema como objeto matemático. Esta pendiente la componente geométrica y la articulación del diseño general.

#### *La combinación lineal, elemento articulador*

Hemos decidido destacar esta definición pues en ella se aprecia el concepto que proponemos como articulador de estas interpretaciones. Consideremos la definición simplificada de Transformación Lineal, donde las dos propiedades que la definen se reducen en una de la siguiente forma:

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v),$$

Para todo  $u$  y  $v$  en  $V$  y para cualquier escalar  $c, d$  en  $K$ , (Larson y Edwards, 2004).

Recordemos la definición de combinación lineal propuesta en el Larson, diremos que un vector  $v \in V$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre  $K$ , es combinación lineal de  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  subconjunto de  $V$  si existen escalares en el cuerpo, no todos nulos tales que  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n$ . (Larson y Edwards, 2004). Dicha definición restringida a la combinación lineal de dos vectores se reduce a  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ , de esta forma, el concepto de combinación lineal está inmerso en la definición de transformación lineal, y es lo que caracteriza este tipo de funciones.

Para la interpretación geométrica del concepto transformación lineal, se tiene que la combinación lineal es un elemento que se preserva; y se logra su comprensión a través del teorema fundamental para el álgebra lineal, es decir cuando logramos entender que en una base se define el espacio vectorial, por lo que es posible definir la transformación lineal conociendo el comportamiento de las bases de los espacios vectoriales relacionados por la transformación lineal; este teorema permite para una aproximación geométrica los elementos fundamentales, pues simplifica la descripción de los vectores a los elementos basales.

Desde otra perspectiva este elemento articulador, la combinación lineal, se encuentra presente en los sistemas de ecuaciones lineales lo que nos permite transitar hacia las matrices, pues es posible reescribir el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial. La descripción

matricial del sistema corresponde a su vez a la búsqueda de la preimagen de un vector descrito en términos de sus coordenadas.

Para la interpretación matricial hemos de reconocer en la definición de la matriz asociada a la transformación lineal algunos elementos de interés, para ello deberemos recordar que dada una  $T:V \rightarrow W$  transformación lineal entre dos espacios vectoriales sobre  $K$ , finito dimensionales  $V$  y  $W$ . Sea  $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $B' = \{v_1', v_2', v_3', \dots, v_m'\}$  una base de  $W$ . La matriz  $A$  de orden  $m \times n$  cuyas columnas son:  $[T(v_1)]_{B'}, [T(v_2)]_{B'}, [T(v_3)]_{B'}, \dots, [T(v_n)]_{B'}$ , es la única matriz que satisface  $[T(v)]_{B'} = A[v]_B$ , para todo  $v \in V$ .

Uno de los elementos de interés es  $[T(v)]_{B'}$ , que corresponde a las coordenadas del vector  $v$  en la base  $B'$ , expresado en términos de la combinación lineal, las coordenadas corresponden a los escalares que hacen posible expresar un vector como combinación lineal de otros. De esta forma estamos cerrando este ciclo donde cada una de las interpretaciones del concepto TL se encuentra relacionada estrechamente al concepto de combinación lineal.

Estos son algunos de los elementos puestos en juego para describir una descomposición genética del concepto transformación lineal en sus tres interpretaciones. Entender los elementos emergentes es parte de la tarea por realizar.

### Referencias bibliográficas

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
- Arnal, J., Del Rincón, D., Latorre, A. (1992). *La investigación colaborativa. En Investigación Educativa: Fundamentos y Metodología*. Editorial Labor: Barcelona, España.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 105-147.
- Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, 27, 267-305.

- Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273–280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Larson, R. y Edwards, B. (2004). Transformaciones lineales. En Noriega (Eds.), *Introducción al Álgebra Lineal* (pp. 353-399). México. Editorial Limusa.
- Molina, J. Oktac, A. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en un Ambiente Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.
- Roa, S., Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (1), 89-112. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Uicab, R. y Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (3), 459-490.