COMPRENSIÓN DE LA SINTAXIS DEL ÁLGEBRA EN TANGENTES A LAS CÓNICAS CON EL MÉTODO DE DESCARTES

Samantha Delfín Azuara
DME, Cinvestav, IPN México
samantha_delfin@ciencias.unam.mx

Resumen. Este artículo forma parte de la investigación maestría de la autora. En este artículo se identifican qué tendencias cognitivas presentan estudiantes de bachillerato cuando se enfrentan al tema de tangentes a las cónicas en un curso de Geometría Analítica (UNAM, 1996). También se analiza si este curso permite una mejor comprensión de la sintaxis algebraica.

Palabras clave: sintaxis algebraica, geometría analítica, tendencias cognitivas, tangentes, cónicas

Abstract. This article is part of author's master's degree research. It identifies which cognitive tendencies present high school students when they study tangents to conic in an Analytic Geometry course. We also analyze if it improves their comprehension of the algebraic syntax.

Key words: algebraic syntax, analytic geometry, cognitive tendencies, tangents, conics

Introducción

El contenido de este artículo forma parte de una tesis de Maestría en la disciplina de matemática educativa. La investigación se centra en la impartición del tema de tangentes a las cónicas a un grupo de educación media superior. El estudio se realizó en un colegio que emplea tanto el sistema del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), como el sistema de bachillerato internacional General Certificate of Secondary Education (GCSE) de la Universidad de Cambridge.

El objetivo de esta investigación es encontrar si la enseñanza de la geometría analítica mejora o no la comprensión de la sintaxis del álgebra en estudiantes de nivel medio superior en México. La elección del tema de tangentes a las cónicas responde a que éste comprende contenidos tanto del álgebra como de la geometría, lo cual permitirá hacer un análisis que nos permita sacar conclusiones pertinentes sobre la hipótesis de la investigación. El presente proyecto es la continuación de la investigación de Neira (2010) sobre la sintaxis del álgebra en la enseñanza de la geometría analítica que también trabajó sobre las tangentes a las cónicas pero dirigido a docentes.

Para esto se utilizaron los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Filloy, Rojano y Puig (2008) con el diseño de un modelo de enseñanza controlada basada en el modelo de competencias formales y el análisis de las tendencias cognitivas de los alumnos antes y después de estudiar este modelo de enseñanza. Las tendencias cognitivas nos permitirán comprender qué es lo que entienden, los estudiantes, del lenguaje algebraico.

Perspectiva teórica

La investigación se desarrolla a partir de los MTL mediante el diseño de un modelo de enseñanza controlada basado en el modelo de competencias formales y el análisis de tendencias cognitivas antes y después de estudiar este modelo de enseñanza. Las tres de los cuatro componentes de los MTL a utilizar son: modelos de enseñanza, modelos de competencias formales y modelos de procesos cognitivos. Debido a la duración de la maestría no se usará el componente restante, el de comunicaciones, como se explicará más adelante.

El presente artículo se restringe al desarrollo de uno de los métodos que se utilizan en el modelo de enseñanza: el método de Descartes para encontrar tangentes a las cónicas. En la investigación se emplea además el método de Fermat. Ambos matemáticos desarrollaron la concepción de la geometría analítica casi simultáneamente en el año 1637, con la diferencia que Descartes publicó sus resultados en el apéndice de *La Géométrie,* del libro *Discours de la méthode,* los resultados de Fermat fueron publicados por su hijo después de su muerte en la obra *Varia Opera Mathematica.*

La diferencia de estos métodos radica en que el método de Descartes es de una naturaleza completamente geométrica y algebraica mientras que el método de Fermat utiliza ideas primitivas del cálculo. Como consecuencia el método de Descartes sería más ampliamente aceptado por los matemáticos de hoy en día por su formalismo sin embargo encontramos que no sirve para curvas superiores. Por otro lado el método de Fermat funciona para cualquier curva, pero adolece de justificar (formalmente) la idea de límite.

Método de Descartes. El método de Descartes descrito en su libro de *La Géométrie* corresponde a suponer la existencia de un círculo tangente de la cónica en cuestión en el punto requerido. Claramente esto resuelve nuestro problema ya que basta encontrar el radio de este círculo respecto al punto. Recordemos que el radio del círculo es perpendicular a la tangente que pasa por el mismo punto. El método de Descartes para encontrar tangentes a las cónicas también se conoce como el método de las raíces idénticas (Cruse, 1982). A continuación éste se describirá con el ejemplo visto en la clase correspondiente.

Supongamos que tenemos la curva $(x-2)^2 = 4(y-2)$, que claramente es una parábola y nos preguntamos que ecuación tiene la tangente a esta curva que pasa por el punto $x = 4$. Claramente la recta de la tangente que estamos buscando es de la forma: $y-3 = m(x-4)$. Enseguida expandimos la ecuación de la parábola y despejando y obtenemos: $y = \frac{x^2-4x+12}{4}$. Igualamos esta última ecuación con la de la tangente y obtenemos una nueva ecuación: $\frac{x^2 - 4x + 12}{4} - 3 = m(x - 4)$. Agrupamos esta ecuación respecto a x para obtener la ecuación de segundo grado: $x^2 + x(-4 - 4m) + 16m = 0$. Resolviendo ésta: $x = \frac{-(-4 - 4m) \pm \sqrt{(-4 - 4m)^2 - 4(16)}}{2}$. Ahora por definición de tangente, la intersección con la cónica debe ser única (de ahí que el método de Descartes funcione sólo para algunas curvas). Por lo tanto el discriminante de esta nueva ecuación debe ser cero. Es decir, $(-4 - 4m)^2 - 64 = 0$, una nueva ecuación que ahora sólo tiene como incógnita a m. Resolviendo esta nueva ecuación obtenemos el valor de m, que en nuestro caso es m=1, ya que aunque tengamos dos raíces sólo una de éstas produce una tangente, ya que la otra recta nunca toca a la parábola. Por lo cual la ecuación de la tangente buscada: $y = x - 1$.

Como se mencionó al principio del artículo, esta investigación se encuadra bajo los MTL, estos constan de cuatro componentes: modelos de enseñanza, modelos para procesos cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación. Esta investigación se limitará al uso de las primeras tres componentes antes mencionadas debido a la duración de la maestría.

Modelo de competencia formal. El modelo de competencia formal corresponde al conocimiento que tiene el investigador sobre el tema en cuestión. Se refiere al conocimiento que tiene el observador sobre el Sistema Matemático de Signos (SMS) (Filloy, 2008) en el tema en particular. El SMS que utiliza el observador deberá ser más abstracto que aquel que será utilizado en el modelo de enseñanza. Esta componente corresponde a la exploración de textos de la teoría matemática investigada.

Modelo de enseñanza. Según Filloy un modelo de enseñanza se caracteriza como sucesiones de textos matemáticos que son intercambiados entre alumno y maestro. Estos se producen a través de sistemas de signos matemáticos estratificados, es decir, se va de lo menos abstracto a lo más. Lo que se propone es "modelar" a partir de situaciones concretas (contextos familiares para los alumnos). Este modelo se desarrolla a partir de lo recolectado en el modelo de competencia formal. En nuestra investigación en particular esto se refiere a que la sintaxis del álgebra es mejor entendida en un contexto concreto, como lo es la geometría analítica, en lugar de sólo cuando los estudiantes lo ven en el curso correspondiente al álgebra pura.

*Modelo de procesos cognitivos***.** El modelo de procesos cognitivos analiza qué procesos se llevan a cabo durante el aprendizaje del álgebra. Filloy nos habla de seis de éstas: la percepción, la dirección de la atención y sus relaciones con los procesos del entendimiento, la memoria, procesos de análisis y síntesis entrelazados con el uso de la lógica, concepciones heurísticas y el aprendizaje. Para analizar estos procesos cognitivos se utilizarán las once tendencias cognitivas que se presentan en la enseñanza del álgebra descritas por Filloy.

Metodología

El proceso de investigación, que es de tipo cualitativo utilizará un análisis fenomenológico que consta de cinco etapas:

1. Evaluación de los alumnos antes de recibir las clases correspondientes a tangentes a las cónicas para poder determinar el nivel de comprensión de la sintaxis del álgebra.

2. Enseñar el tema con un modelo de enseñanza específico diseñado por el investigador, basado en los libros de texto de Eugenio Filloy, *Geometría Analítica* y el de Lehmann, *Geometría Analítica* y los textos correspondientes de Fermat y Descartes.

3. Aplicar un cuestionario para evaluar las dificultades de comprensión de la sintaxis del álgebra en el tema y la comprensión del mismo.

4. Hacer entrevistas semi-estructuradas a 3 tipos de alumnos: de alto, regular y bajo desempeño.

5. Sacar conclusiones basadas en los resultados.

El contenido del primer cuestionario fue sobre álgebra y algunas propiedades geométricas correspondientes a lo propuesto en la currícula de matemáticas de secundaria. El segundo cuestionario fue sobre tangentes a las cónicas haciendo énfasis en el uso de la sintaxis algebraica. El cuestionario diagnóstico consistió en encontrar la tangente de la parábola $(x-2)^2 = 4(y-2)$ cuando x=5.

El análisis de los resultados de los cuestionarios se hará respecto a las tendencias cognitivas que tengan los alumnos. La investigación se lleva a cabo en un grupo de segundo año de bachillerato de la Ciudad de México que consta de once estudiantes. El tema se impartió en una clase que duró dos horas, posterior a un repaso de las propiedades de las cónicas. Antes de introducir el método de Descartes (1637), también se habló un poco de la historia de las tangentes. La clase completa se presentó con un cañón. Se realizó la explicación teórica del método de Descartes y además se realizó un ejemplo detallado de cómo encontrar la tangente en una parábola indicando claramente por qué este método nos permite encontrar tangentes a las cónicas en general.

Resultados

Los resultados en este artículo corresponden exclusivamente a los obtenidos en el cuestionario correspondiente al método de Descartes. Se harán comparaciones con el primer cuestionario cuando sea pertinente. El primer cuestionario constó de 28 reactivos. La distribución del contenido de los reactivos fue la siguiente: diez reactivos respecto a la sintaxis del álgebra, uno respecto proporcionalidad, uno respecto a ecuaciones cuadráticas, ocho respecto a ecuaciones lineales, uno respecto a trigonometría y siete respecto a propiedades geométricas. En general el desempeño de los estudiantes fue muy bajo. El número de reactivos correctos máximo fue diez y el mínimo fue cero. El número de respuestas correctas más frecuente fue siete. Respecto a la sintaxis del álgebra encontramos que operan con sus propias reglas y que a veces éstas corresponden a una mala comprensión de las reales. La tendencia cognitiva que más presentaron en general fue: la articulación de generalizaciones erróneas.

Respecto al cuestionario correspondiente al método de Descartes encontramos que solamente cuatro de los once sujetos llegaron a la parte de encontrar la tangente algebraicamente. Sin embargo ninguno de estos pudo encontrar la tangente de la parábola. Los cuatro individuos entienden que multiplicar una igualdad por una constante afecta ambos lados de la igualdad, pero ninguno empleó la sintaxis correcta. Es decir, nos encontramos en la presencia de la tendencia cognitiva (Filloy, 1993): "la presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para producir reglas sintácticas nuevas". Además estos alumnos pudieron encontrar qué valor le correspondía a *y* dado *x*.

$$4\left(\frac{(x-1)^2}{4} - 4 = m(x-5)\right)$$

Figura 1. Sintaxis empleada por un alumno para indicar la multiplicación de una ecuación por una constante.

Tres de ellos pudieron desarrollar un binomio al cuadrado correctamente. Sin embargo, no lograron expandir un binomio al cuadrado con ambos términos negativos. Es decir, nos encontramos en presencia de la tendencia cognitiva: "la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse antes".

$$y = \frac{x^2 - 10x + 25}{4}$$

Figura 2. Expansión que corresponde al binomio $(x \square 5)^2$.

$$x = \frac{(10-4m)^2 - 60m + 36}{2}$$

$$x = \frac{100 - 16m^2 - 60m + 36}{2}$$

Figura 3. Expansión de un binomio negativo. Se observa que el estudiante sólo elevó al cuadrado ambos términos del binomio. Después de haber realizado la expansión observada en la figura 3.

Dos de los estudiantes entienden que los parámetros de una cuadrática no son necesariamente números.

$$x^2 - 10x - 4mx + 20m + 9 = 0$$

$$x^2 + x(-10 - 4m) + 20m + 9 = 0$$

Figura 5. Agrupación respecto a x. Observemos que los parámetros no son necesariamente números.

Estos mismos no entienden que un signo afecta a todos los elementos dentro del paréntesis y además no pueden resolver una cuadrática que tenga como incógnita una letra diferente a *x* (en este caso *m*). Estas dos conductas corresponden a la tendencia cognitiva: "la articulación de generalizaciones erróneas", ya que intentaron resolver la cuadrática pero escribieron que ésta era la solución de *x* en lugar de *m*.

$$16m^2 - 80m + 136 = 0$$

$$x =$$

Figura 6. Un alumno llegó a esta cuadrática, pero cuando puso x= no supo cómo continuar a partir de su cuadrática.

Conclusiones

Los alumnos no entendieron el método de Descartes y sólo repitieron el procedimiento enseñado. Aunque muchas de sus concepciones de la sintaxis algebraica son incorrectas, éstas han mejorado respecto al primer cuestionario correspondiente a la investigación en curso.

Sus concepciones erróneas corresponden a lo que entendieron mal desde la enseñanza del álgebra en la secundaria e inclusive a la de la aritmética en la primaria. El uso de la geometría analítica sí mejoró su comprensión de la sintaxis algebraica, sin embargo no resuelve el problema por completo. Es necesario que se trabaje conjuntamente con los niveles de secundaria y primaria ya que es imposible que se corrija todo lo que entendieron mal desde su enseñanza básica en el nivel medio superior.

Referencias bibliográficas

Cruse A.B. y Lehman M. (1982). *Lecciones de Cálculo 1. Introducción a la derivada.* México: Fondo Educativo Interamericano. (Traducción Arizmendi H. y Lara M.)

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*. (Smith D.E. y Latham M.L., Traducido) Nueva York, NY: Dover. (Trabajo original publicado en 1637).

Filloy, Y.E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y la geometría. *Enseñanza de las ciencias, 11*(22), 160-166.

Filloy, Y.E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, Y.E., Rojano T. y Puig L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Estados Unidos de América: Springer.

Neira, J.V. (2010). *Sintaxis del álgebra en la enseñanza de la geometría analítica*. Tesis de maestría no publicado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Universidad Nacional Autónoma de México (1996). *Programa de estudio de Matemáticas. Semestres I al IV*. Educación Media Superior. México: CCH, UNAM.