

## PROCESOS DE GENERALIZACIÓN QUE INTERVIENEN EN EL APRENDIZAJE DEL ALUMNO AL HACER USO DE SUCESIONES

Juan Carlos Osorio Paulino

Cinvestav - IPN

josorio@cinvestav.mx, thinkingmathematics@live.com

México

**Resumen.** El presente reporte de investigación de tipo cualitativo, tiene por objeto dar a conocer, como parte de la investigación, resultados relacionados con los procesos de generalización que se presentan en alumnos de edades 14-15 años al tratar con sucesiones figurativas, en donde el patrón matemático se comporta en forma lineal y cuadrática. Se señala que el hacer uso de patrones, desarrolla el pensamiento algebraico, así como también permite a los estudiantes desarrollar la comprensión del concepto como establecer relaciones matemáticas. Como parte de la perspectiva teórica se ha empleado el Modelo Teórico Local, considerando tres de los cuatro componentes: Competencia formal, modelo de enseñanza y procesos cognitivos..

**Palabras clave:** generalización, patrones, inducción

**Abstract.** This report of qualitative research, aims to raise awareness as part of research results related to generalization processes that occur in students aged 14-15 years in dealing with figurative sequences, where the pattern behaves mathematical linear and quadratic. It is noted that the use of patterns, algebraic thinking develops, and also allows students to develop an understanding of the concept and mathematical relationships. As part of the theoretical perspective we have employed the local theoretical model, considering three of the four components: Competition formal model of teaching and cognitive processes.

**Key words:** generalization, patterns, induction

### Introducción

Varias investigaciones que tienen que ver con los procesos de generalización, identificar términos faltantes y las dificultades que tienen los alumnos al enfrentarse a una situación en la que implica hacer uso de patrones, están siendo tratadas de manera considerable.

La generalización es un medio que conlleva hacia la abstracción, por tanto el aprender un lenguaje algebraico, requiere de la comunicación y esta, se presenta cuando el alumno identifica un patrón e intenta expresarlo a alguien (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1985). El problema de investigación radica en que los alumnos, al tratar de construir una expresión algebraica de segundo orden mediante el tratamiento de sucesiones figurativas, presentan dificultades, no alcanzando a percibir los cambios que presenta una figura respecto a otra o identifican un patrón numérico y llegan a su posible generalización. Por tal razón, nuestro objetivo se centra en observar las tendencias cognitivas que presenta el alumno cuando se encuentra en la búsqueda del  $n$ -ésimo término de una sucesión figurativa tanto lineal como cuadrática y cómo proceden para llegar a generalizar el comportamiento que tiene el patrón matemático.

Como parte de la investigación, es indispensable contar con marco teórico y metodológico para la observación experimental en materia educativa: el Modelo Teórico Local (Fillooy, 1999).

De este modelo se ha considerado a sólo tres de sus cuatro componentes: procesos cognitivos, modelo de enseñanza y la componente formal.

En este artículo se pretende dar a conocer los procesos de generalización que se observan en entrevista, cuando el alumno trata con este contenido: percibir un patrón, explicar en lengua materna y escrita cómo se obtuvieron tales elementos para cada uno de los términos correspondientes, y la construcción de una expresión algebraica.

### **Justificación**

Las dificultades que se abordan a partir del álgebra mediante la generalización, han sido tema de investigación como es el caso de Mc Gregor & Stacey (1993) quienes mencionan que los estudiantes tienen dificultades para describir y expresar algebraicamente patrones. El estudio de patrones es una forma productiva para desarrollar el pensamiento algebraico en grados elementales o básicos según Ferrini, Lappan & Phillips (1997). Cuando los alumnos estudian patrones, hacen uso de inducción debido a que este proceso cognitivo parte de situaciones particulares en las que se observan ciertas regularidades que tienden a generalizar; es decir, buscan sintetizar un patrón que se identifica en una sucesión. Este proceso de descubrimiento ha sido debatido en el Curriculum and Evaluations Standards for School Mathematics (NCTM, 1989). De igual forma, Polya (1945) afirma que este tipo de razonamiento da lugar al conocimiento científico porque permite descubrir leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Mientras que Mason et al. (1985) corroboran esto al decir que es una manera de acercarse al álgebra; como generalización o pensamiento en términos de número general. La inducción es un medio potente para la adquisición de conocimiento, para realizar descubrimientos matemáticos y para poner a los alumnos en una situación semejante a la de un matemático en su quehacer científico (Cañadas, M. C., Castro E. & Castro, E. 2008).

### **Método**

La investigación es de tipo cualitativo, en una primera fase o como antecedente, se revisó el eje sentido numérico y pensamiento algebraico de la propuesta institucional referente a educación secundaria con el objeto de identificar cómo el contenido matemático aquí descrito es tratado y al mismo tiempo de qué manera está asociado con otros conceptos matemáticos referentes al álgebra, debido a que se encontraron insuficientes actividades relacionadas con patrones numéricos o figurativos de segundo orden, siendo que en los programas de estudio se describe que el alumno debe ver lo general en lo particular (SEP, 2006) para obtener una expresión algebraica que le permita calcular el  $n$ -ésimo término de una sucesión regida por un patrón. Posteriormente, para el diseño de la experimentación es importante identificar, para la observación de casos, un corte didáctico; es decir un momento del programa de estudio, en el

que lo aprendido por parte del alumno no permita que lo que se pretende enseñar pueda descubrirse en forma espontánea.

Todo con el fin de que encontrar tendencias y procesos de generalización que se presentan en la población en estudio, con lo aprendido anteriormente, ante las preguntas más elementales.

Para tales efectos y desarrollo de la experimentación, se eligió una población de 15 alumnos de tercer grado de una escuela secundaria general, a los cuales se les aplicaron dos cuestionarios exploratorios para medir la eficiencia en el uso de los SMS (Sistemas Matemáticos de Signos) que se consideran más concretos del nuevo SMS más abstracto.

De igual forma, al ser analizadas estas evaluaciones previas al diseño de actividades, permitirá observar y clasificar por perfiles o estratos a la población según sus desempeños en entrevista clínica y hacer un análisis e interpretación de las observaciones.

A la población en estudio la hemos clasificado bajo tres criterios que bien es apego a la estructura que tiene el cuestionario o evaluación diagnóstica, el primero está asociado a observar las competencias sintácticas de los alumnos en el uso del SMS más concreto, el segundo que tiene que ver con la semántica de esos SMS y el tercero vincula los usos intuitivos y espontáneos de los perfiles del SMS más concreto que son utilizados en las descodificaciones de las nuevas situaciones de enseñanza.

### Resultados

A continuación mostramos un ejemplo de un reactivo, que forma parte del cuestionario exploratorio y en el que varios alumnos, al tratar de dar respuestas a las interrogantes presentaron semejantes dificultades, que sin duda, algunos son errores de procedimiento y están asociados con el proceso de generalización. Cabe remarcar, que la consigna consiste en completar el término cinco y seis respectivamente. Además, explicar cómo se encontraron valores, así como determinar una expresión algebraica que represente el comportamiento de dicha sucesión (ver figura 1).

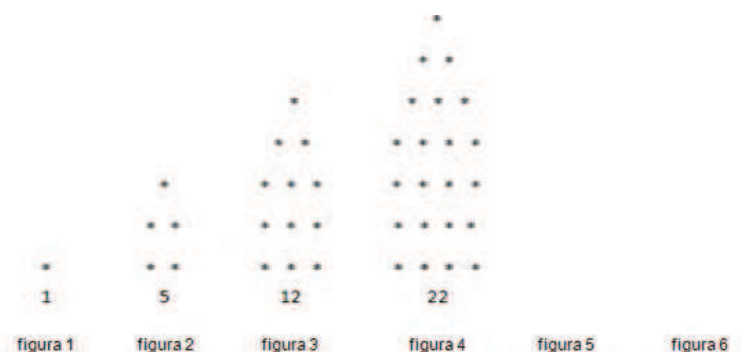


Figura 1. Ejemplo de sucesión cuadrática.

Una de las dificultades que presentaron los alumnos fue que no pudieron percibir un patrón; es decir, no se percataron que entre una y otra figura existe una regularidad, por tanto no se completan los términos faltantes. Percibir, forma parte del proceso de generalización, sin embargo, los alumnos no discriminan que sucede entre una figura y otra. A continuación se presenta la respuesta que se tuvo, en el cuestionario exploratorio, de uno de los varios casos que fueron observados, en específico, de una alumna que hemos denotado con la letra B (ver figura 2).

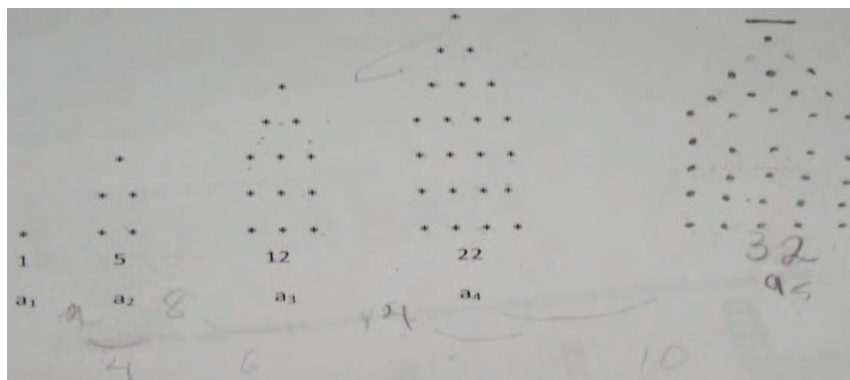


Figura 2. Respuestas al reactivo del cuestionario exploratorio por la alumna B.

Para dar cuenta de las respuestas escritas, se realizaron entrevistas. Consideremos un fragmento de una ellas, en donde la alumna B explica que procedimiento siguió para dar respuesta a las interrogantes que se le fueron planteadas:

*Entrevistador:* ¿Por qué corresponden 32 puntos a la figura 5?

*B:* Porque igual me basé en las figuras anteriores y fui anotando cuál era su variación entre cada una de las figuras, aquí este, me dio cuatro, ocho, catorce, y ya para terminar la siguiente igual tuve que hacer nuevamente otra, ver cuánto me faltaba, cuál era, si había una constante más entre las figuras, entonces saqué igualmente otra serie por así decirlo y me dio que iban aumentan... ésta si tenía una constante que sería el número dos y aquí va aumentando de dos en dos entonces eso me ayudo a determinar cuántos números de puntos yo iba a poner en la figura cinco.

La alumna B señala que de la figura uno a la figura dos, hay cuatro puntos de diferencia, luego para obtener la tercera figura, considera el número (variación, en palabras de la alumna B) obtenido, que es 4 y suma 8 para poder obtener los 12 asteriscos de la tercera figura, por tanto para obtener la cuarta figura sumó 8 más 14 para obtener un total de 22 asteriscos (ver figura 3).

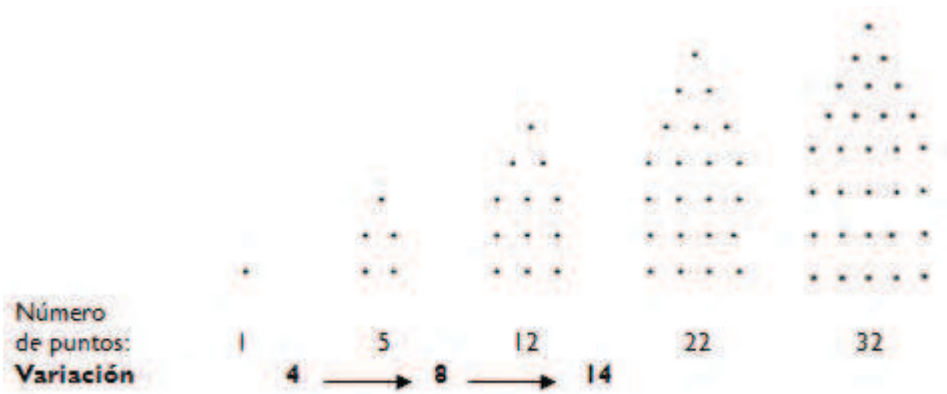


Figura 3. Representación de la obtención de los valores llamados “variaciones”

Si bien es cierto que aquí nos estamos centrando en un caso, no significa que estemos por el momento, universalizando la presencia de un proceso de generalización, pero si es importante que se tenga en cuenta que para llegar a la abstracción se requiere percibir, cosa que la alumna B, junto con otros compañeros, no observaron esas regularidades en las figuras, aún sabiendo que ellas son un recurso que pueden ayudar a contabilizar el número de elementos que contiene cada figura y encontrar un patrón.

Siguiendo en la misma línea, se cuestiono a B para saber cuántos asteriscos tendrá la quinta figura, B explico: “...para terminar la siguiente igual tuve que hacer nuevamente otra, ver cuánto me faltaba...” Observamos que primero realizo nuevamente una diferencia, entre la “variación” que obtuvo para encontrar una regularidad. Entre el número 8 y 4 hay 4 de diferencia, entre la número 14 y 8 hay 6 de diferencia (ver figura 4).

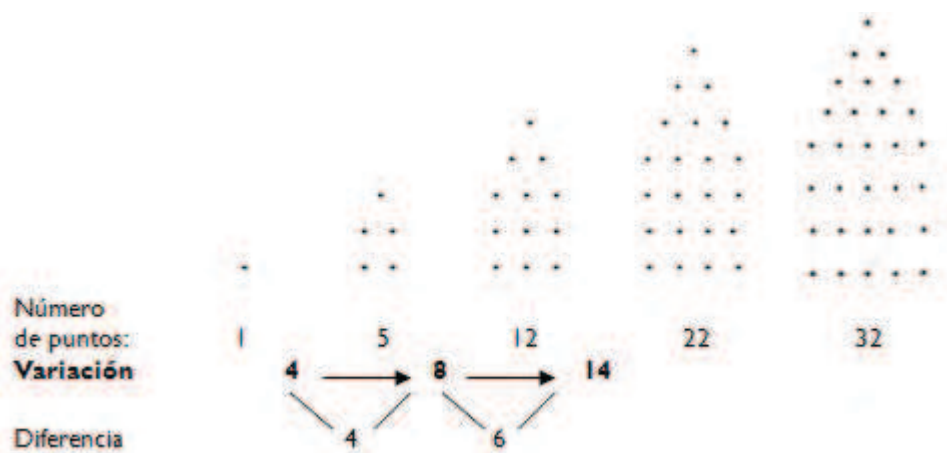


Figura 4. Representación de la diferencia existente entre los valores de la “variación”.

Posteriormente B comento “...saqué igualmente otra serie por así decirlo...ésta si tenía una constante que sería el número dos y aquí va aumentando de dos en dos...” Esto quiere decir que obtuvo otros números, respecto a 4 y 6. Obtuvo el número dos, que ella denoto como

constante, la cual iría aumentando en esa línea ese mismo número, por tanto, el siguiente número que corresponde a la línea llamada diferencia sería 8. Hemos encerrado en una circunferencia ese valor (ver figura 5)

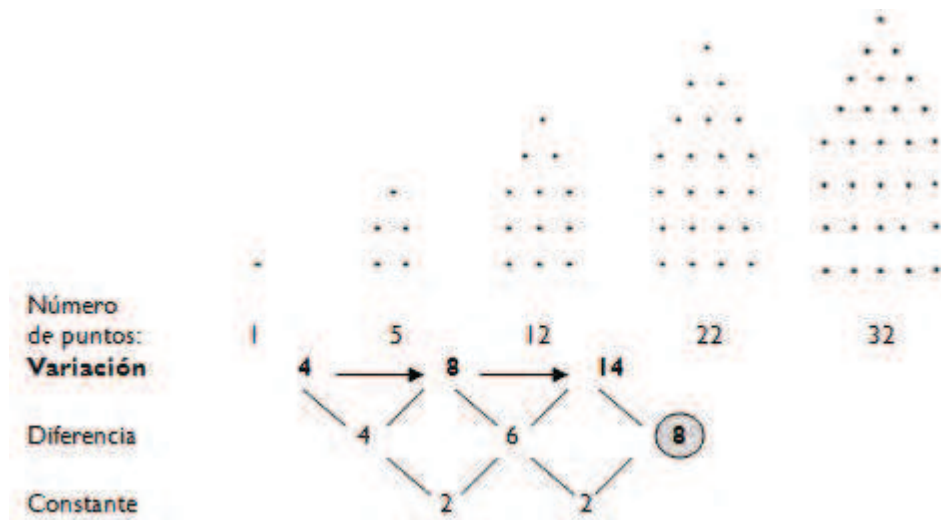


Figura 5. Representación de cómo B encontró la constante y determino el valor 8.

En entrevista B señala, que el primer número de la “variación” con la diferencia (así lo hemos denotado), estos números los suma y obtiene la segunda “variación”, luego considera el segundo número de la “variación” con la segunda diferencia y los suma para obtener el tercer término de la “variación”. Para obtener el cuarto término de la “variación” la entrevistada suma el tercer número de la “variación” que es 14 con el número que de acuerdo a la explicación que B dio debe ser 8 (el que está encerrado en la circunferencia), y una vez sumados nos da 22, que sería el siguiente número de la “variación”, el cual está encerrado en un cuadrado (ver figura 6)

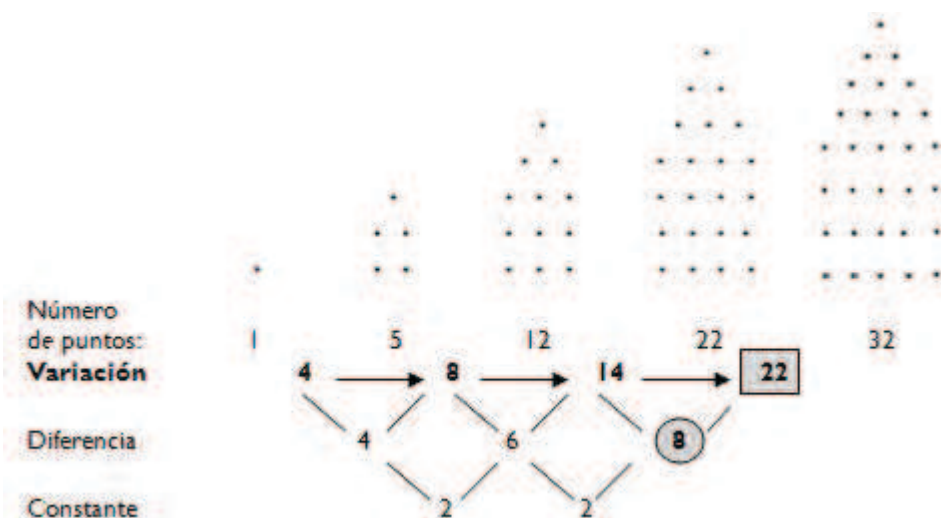


Figura 6. Representación de cómo B visualiza parcialmente la regularidad.

Para obtener el número total de puntos de una figura, recordemos que B ha sumado de acuerdo a su regla, la antepenúltima y penúltima “variaciones”. Entonces significa que B sumó 14 y 22 para obtener 36, que es el valor en número de asteriscos que de acuerdo al procedimiento empleado, tendría la figura 5.

Por otra parte, una de las cosas que podemos destacar en esta actividad que llevaron a cabo los alumnos, es que parte de la población en estudio consideró que cada figura tenía una base, por ejemplo la figura 5 está representada por una base de  $5 \times 5$ , más las regularidades de los siguientes pisos.

Hay quienes contabilizaron de uno por uno el número de asteriscos para dibujar la subsecuente figura. Otros en cambio, utilizaron el método del tanteo al ser cuestionados sobre el número de asteriscos que tendría otra figura diferente a las que se le pedían en la consigna.

Otra cosa que debe destacarse es la presencia de las primeras y segundas diferencias que si bien en este caso están mal calculadas, conforman un procedimiento para obtener la expresión general de una sucesión, que contiene un proceso de generalización porque perciben regularidades, expresan en lenguaje materno y escrito cómo determinaron cada una de ellas al ser entrevistados.

También hubo alumnos quienes intentaban legitimar o validar expresiones algebraicas muy cercanas a la representación del comportamiento de una sucesión, percibieron un patrón puesto que completaron de manera correcta las figuras que se les pedía, explicaron claramente las regularidades que encontraron, así como describieron que tuvieron que hacer para completar o saber cuántos asteriscos tendría una subsecuente figura.

## Conclusiones

Cuando se presenta una actividad a los alumnos con secuencias figurativas o numéricas de tipo lineal o cuadrática ellos, no todos, perciben una regularidad; observan lo que va pasando de una figura o número a otro.

Es importante mencionar que la población en estudio identificó mejor el patrón cuando se trataba con figuras, debido al tipo de arreglos, pues permitía observar claramente las regularidades, porque se analizan todas sus partes, desde que se descompone, por así decirlo, a la figura.

También podemos afirmar que el alumno al tratar con sucesiones figurativas le permite conjeturar e iniciarse en los principios del álgebra, debido a que hacen uso de expresiones verbales, palabra, dibujos y símbolos que les permiten acercarse a la simbolización.



Por tanto, los alumnos describen y dicen cuál es patrón numérico, registran numéricamente como va creciendo esa sucesión y además construyen una expresión que permite asociarla con el patrón numérico encontrado, debido a que identifican constantes y explican que significan cada uno de los términos que conforman a la expresión siempre y cuando el patrón sea lineal.

Sin embargo, no en todos los caso, se observó que cuando se trata de relacionar una figura o número cuyo patrón es de tipo cuadrático, sucede lo contrario, varios alumnos no se percatan de que está sucediendo de un término a otro, no observan qué pasa de una figura a otra, mucho menos expresan su respuesta, no dicen cuál el patrón que sigue dicha sucesión, por ejemplo, a la pregunta ¿cómo llegaste o encontraste la figura o número siguiente de la sucesión? En consecuencia, no expresan en forma simbólica el comportamiento que está teniendo el patrón. Esta tendencia que manifiestan los alumnos, se ve implicado más cuando se emplean numerales y no figuras. A pesar de que percibir una figura que forma parte de una sucesión de tipo grado dos, les ayuda a los alumnos a ver cuál es el patrón, a los alumnos no les permite establecer u obtener una expresión que generalice el comportamiento de la sucesión, ni mucho menos registrar con palabras u otros símbolos ese patrón, a menos que la sucesión sea de tipo lineal.

En general, los alumnos tienden a quedarse en la etapa de verbalización o la expresión escrita cuando tratan con sucesiones cuyo patrón es de segundo orden. Sin embargo, observamos que al hacer uso de sucesiones, siendo un caso de inducción, permite que el alumno genere sus propias estrategias.

### Referencias bibliográficas

Cañadas, M. C., Castro, E. & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.

Ferrini, J., Lappan G. & Phillips E. (1997). Experiencias with Patterning. *Teaching Children Mathematics* 3 (6) 282-289.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos de Álgebra Educativa*. México: Iberoamérica.

Mac Gregor, M y Stacey, K. (1993). "Seeing to patern and writing to rule", *PME, Psychology of Mathematics Education*, Ibaraki, Japón.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Gran Bretaña: The Open University Press.



National Council of Teacher of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: Council.

Pólya, G. (1945) *How to solve it*, University Press. Princeton.

SEP, 2006. *Programa de estudios 2006*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Dirección General de Desarrollo Curricular, que pertenece a la Subsecretaría de Educación Básica, México.