

EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN UN PROBLEMA CUYA SOLUCIÓN DEBERÍA SER UN NÚMERO NEGATIVO: LA INFLUENCIA DEL CONTEXTO, DEL LENGUAJE Y DEL DATO SOBRANTE

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Josip Slisko Ignjatov, Luis David Benítez Lara
 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
 lhernan@fcm.buap.mx, jsisko@fcm.buap.mx

México

Resumen. Presentamos los resultados de un instrumento diseñado para estudiar el desempeño de estudiantes del primer año de una facultad de ciencias físico matemáticas ante un problema que involucra números con signo. En este instrumento se planteó un problema de un libro de texto de educación media básica y se encontró que más del cincuenta por ciento no utiliza un signo negativo como se espera que lo hagan. Con el instrumento y las respuestas de los estudiantes analizamos la pertinencia del contexto, la influencia del lenguaje utilizado y la influencia de un dato sobrante.

Palabras clave: problemas contextualizados, números negativos, modelo situacional

Abstract. We present the results of an instrument designed to study the performance of students in the first year of a mathematics faculty to physical problems involving signed numbers. This tool uses a problem of a high school textbook and we found that over fifty percent do not use a negative sign as expected to do. With this instrument and the responses of the students we analyze the relevance of the context, the influence of the language used and the influence of the excess data.

Key words: contextualized problems, negative numbers, situation model

Introducción

Los problemas contextualizados de matemáticas están siendo sugeridos como una herramienta para motivar y lograr un aprendizaje significativo de las mismas (Bickmore-Bran, 1993; Font, 2006; Ramos y Font, 2006; Ainley, 2012), así como para evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes (PISA, 2003). De estas sugerencias ha surgido la inquietud en algunos investigadores de determinar o caracterizar los contextos más adecuados que nos permitan alcanzar los fines mencionados. Por un lado, Palm (2006) recomienda usar contextos auténticos y, por el otro, Wiest (2001) ha analizado la pertinencia de los contextos basados en la fantasía. El problema que estudiamos en esta investigación utiliza un contexto deportivo, un salto de longitud, el cual debería de ser conocido por los estudiantes de secundaria. Sin embargo, con el fin de que intervenga un número negativo en la solución del problema, el autor logra una redacción que no evoca el uso del número negativo. Así, un contexto pertinente no es suficiente cuando la redacción del problema no propicia la construcción del modelo de la situación, paso básico para la construcción del modelo matemático y la solución del problema, según la teoría de Kintsch (1998) sobre comprensión de textos.

Marco Teórico: números negativos, problemas contextualizados y modelo situacional

Es conocido el gran problema didáctico que implica la enseñanza y el aprendizaje del concepto de número negativo. Su complicado desarrollo histórico sugiere un obstáculo epistemológico para su construcción como objeto mental verdadero (Bachelard, 1980). Uno de los problemas de la enseñanza es vencer este obstáculo epistemológico y ayudar a los estudiantes a construir un modelo coherente para los números negativos (Schwarz, Kohn y Resnick, 1994). Retomando los estudios de Freudenthal (1983), varios autores coinciden en sugerir la construcción de los números negativos a través de la extensión de los números positivos. Con estas extensiones los números negativos adquieren algunos significados que los relacionan con el mundo físico: como cantidades dirigidas, como objetos que se combinan o particionan, como objetos que cambian o como objetos que representan posiciones sobre la línea recta. A partir de estos significados, hay algunos modelos tradicionales que han sido usados para enseñar los números negativos. Schwarz, Kohn y Resnick (1994) hacen un recuento de estos modelos: de deudas, de cancelación, los cuales incluyen monedas, colores, damas chinas; elevadores, en el que se trabajan posiciones; tiempo (antes y después de Cristo); temperatura y, por supuesto, el modelo formal.

Con respecto a la contextualización, Kulm (1984) y Boaler (1993) consideran que el contexto parece influenciar en las etapas de comprensión de un problema y en la planeación de su solución. Voyer (2011) utiliza problemas verbales aritméticos en los que el contexto puede o no ser tomado en cuenta para obtener la solución y varía diferentes tipos de información en el enunciado de los problemas: información situacional, información explicativa (que ayuda a comprender el problema) y la que ayuda a resolver el problema (datos numéricos). Tal investigador concluye que la información sobre la situación influye positivamente en el desempeño del estudiante cuando éste la toma en cuenta, pero que, los estudiantes con pocas habilidades aritméticas retienen más información del tipo explicativa que de la situación.

Para describir el proceso que siguen los estudiantes al tratar de entender el problema mencionado, nos basaremos en las ideas de Kintsch (1998) y Kintsch & van Dijk (1978). Ellos afirman que en la comprensión de un texto son importantes dos etapas básicas: la construcción de la base de texto y la construcción del modelo situacional. La base de texto se elabora a partir de las proposiciones del texto y expresa su contenido semántico, tanto a nivel global como local. El modelo situacional se construye mediante la integración del contenido textual en los esquemas de conocimiento del lector. Es una representación mental de la situación que plantea el problema y es un paso previo al modelo matemático.

En un trabajo previo (Hernández, Rodríguez y Slisko, 2010) hemos estudiado el mismo problema (ver adelante) con un grupo de segundo grado de secundaria. Los resultados fueron sorprendentes: ningún estudiante dio como respuesta un número negativo como lo pide el problema. Como creemos que esos resultados no fueron causados por la edad de los estudiantes ni por la falta de conocimientos matemáticos, sino por la inadecuada contextualización y formulación del problema, preparamos esta investigación.

Metodología

Diseñamos cuatro instrumentos con variantes del problema en estudio que permitieran detectar dificultades con el contexto, lenguaje inadecuado y uso de un dato sobrante.

El problema al que se refiere esta investigación se encuentra en un libro de texto del segundo grado de educación secundaria distribuido por la SEP (Arriaga, Benitez y Cortés, 2008). A este problema le llamaremos la versión original.

“Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Si del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y un paso de ella equivale a 0.70 m y su salto es de 3.80 m, ¿con qué número con signo representas el recorrido previo al salto?”

En el libro no aparece un dibujo, por lo que, en los instrumentos agregamos la instrucción:

- I. En el espacio de abajo, dibuja, lo más fiel posible, la situación descrita en el problema, tal como la entiendes tú.

A cada parte importante del dibujo agrega un nombre e incluye todos los números que aparecen en el texto del problema.

Elaboramos otra versión del problema, a la que llamaremos versión modificada, de tal manera que el lenguaje y la redacción del problema evocaran la idea de número negativo. En esta versión modificada, hemos cambiado la palabra recorrido por posición y también hemos cambiado algunos signos de puntuación.

“Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa. Un paso de ella equivale a 0.70 metros. El salto de Cecilia usualmente es de 3.8 metros. ¿Qué número con signo describe mejor la posición de Cecilia al realizar los 15 pasos?”

Las otras dos versiones que comparamos son la versión original y esta misma versión con una advertencia sobre el dato sobrante.

Los participantes fueron 122 estudiantes del primer año de las carreras de matemáticas, matemáticas aplicadas, física, física aplicada y actuaría de una universidad pública. Estos estudiantes se encontraban cursando la materia de Cálculo Diferencial y pertenecían a cuatro grupos, dos matutinos, que llamaremos A y B, y dos vespertinos que llamaremos C y D. En todos ellos había estudiantes de las 5 carreras mencionadas y esta información no fue tomada en cuenta para el análisis de las respuestas. Se sabe que en el grupo A se encontraban los estudiantes con mejor promedio obtenido en el bachillerato debido a los lineamientos administrativos que se siguen para seleccionar sus horarios. Así, por la misma razón, en los grupos C y D consideramos que se encontraban estudiantes con un promedio menor.

Las versiones original y modificada se aplicaron en los grupos A, C y D. La versión original con y sin advertencia se aplicó en los grupos A y B.

En las cuatro versiones aparece la instrucción I que pide a los estudiantes hacer un dibujo que describa la situación que plantea el problema.

La pregunta siguiente también aparece en todas las versiones: ¿Qué parte del texto del problema consideras dudosa o incomprensible?

Los dibujos y las respuestas de los instrumentos que hemos diseñado se analizan con el objetivo de conocer el desempeño de los estudiantes y de determinar si la formulación del problema es adecuada para inducir el uso de números negativos.

Resultados principales

Consideramos que la respuesta correcta al problema es -10.5 m en el caso de las dos versiones del problema. Que el dato sobrante es que la longitud del salto de Cecilia es 3.8 m y que un dibujo que describe adecuadamente la situación que plantea el problema es el que mostramos en la Figura 1.

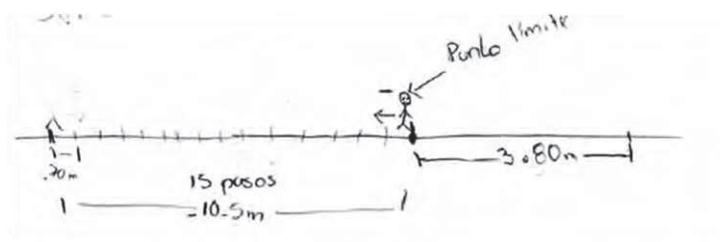


Figura 1. Ejemplo del dibujo de un estudiante

Los resultados que presentamos muestran que, aún en este nivel, más de la mitad de los estudiantes no dan como resultado un número negativo.

	Versión Original			Versión Modificada		
	Correctos	Incorrectos	Total	Correctos	Incorrectos	Total
A	13	12	25	11	7	18
B	7	19	26	0	0	0
C	10	6	16	4	10	14
D	5	6	11	6	6	12
Subtotales	35	43	78	21	23	44
Porcentajes	44.8%	55.2%		48%	52%	

Tabla 1. Respuestas correctas en las versiones original y modificada

La Tabla 1 muestra que en ambas versiones las respuestas correctas no alcanzan el 50% del total de los encuestados, pero que la versión modificada con la palabra “posición” en lugar de “recorrido” supera en 3 puntos porcentuales a la versión original. Aunque cabe hacer notar que en el grupo C, con menor promedio en el bachillerato, hubo un porcentaje mayor de respuestas correctas en la versión original (62%) que en la modificada (28%). Mientras que en el grupo A, con mejor promedio en el bachillerato, se obtuvieron más respuestas correctas en la versión modificada (61%) que en la original (52%). Por otro lado, el mayor porcentaje de respuestas correctas se obtuvo en este grupo A.

Las respuestas incorrectas que con mayor frecuencia dieron los estudiantes se muestran en la Tabla 2.

10.5 metros	24
21 metros	6
0 metros	6
Signo negativo	5
14.3 metros	4
Menos 15 pasos	4

Tabla 2. Respuestas erróneas más frecuentes

Uso del dato sobrante

En el total de los encuestados sólo 18 estudiantes de 122 usaron el dato sobrante de 3.8 para hallar la solución del problema, es decir, solo el 15%. Al comparar las versiones con advertencia y sin advertencia, las cuales fueron aplicadas a los grupos A y B, obtuvimos lo siguiente:

Sin advertencia		Con advertencia	
Usaron 3.8	No usaron 3.8	Usaron 3.8	No usaron 3.8
9	21	2	37
30%	70%	5.12%	94.88%

Tabla 3. El uso del dato sobrante

En la Tabla 3, se observa que la advertencia de que en el texto del problema había un dato sobrante, disminuyó el uso de este dato de un 30% a un 5%.

En la Figura 2 se muestra la forma en la que un estudiante utiliza el dato sobrante.

Handwritten student work showing a diagram and calculations. The diagram shows a horizontal line with a total length of $D = 10.5 \text{ m}$. A segment of length d is marked, and a jump of length $s = 3.8 \text{ m}$ is indicated. The calculation shows $d = D - s = 10.5 - 3.8 \text{ m} = 6.7 \text{ m}$.

Figura 2. Respuesta de un estudiante que hace uso del dato sobrante.

Dificultades en la construcción de la base de texto

En el enunciado del problema podemos observar que no se describe claramente la posición de Cecilia ya que, al no contar con un dibujo, el lector no conoce la ubicación del punto límite ni de la fosa. Para muchos estudiantes no es claro si Cecilia salta después de dar los 15 pasos o si salta desde el punto límite. El obstáculo principal que hemos detectado para la comprensión del texto es que se pide el recorrido previo al salto, y este incluye los 15 pasos que da Cecilia para alejarse de la fosa (10.5 metros) y otros 10.5 m que tiene que recorrer para dar el salto. Los estudiantes que interpretan de esta forma esta situación no entienden por qué la respuesta debe ser un número negativo. Para detectar los problemas que dificultan la construcción de la base de texto, observamos las respuestas de los estudiantes a la pregunta ¿Qué parte del texto del problema consideras dudosa o incomprensible? Las respuestas más frecuentes se muestran en la Tabla 4.

15 pasos en sentido contrario	32
Número con signo	20
La pregunta	18
Punto Límite	15
Ninguna	12
El salto de Cecilia	10
¿Qué es fosa?	8

Tabla 4. Partes del texto dudosas o incomprensibles según los estudiantes.

Dificultades en la construcción del modelo de la situación

Al observar los dibujos de los estudiantes, detectamos que la redacción del problema y el lenguaje utilizado impiden la construcción de la base de texto, lo que a su vez dificulta la construcción del modelo situacional. Aproximadamente, la mitad de los estudiantes encuestados construyeron modelos situacionales distintos al que plantea este problema. Algunas de las interpretaciones que pudimos registrar son las siguientes:

1. Cecilia camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y después salta 3.8 metros (Figura 3).
2. Cecilia recorre 10.5 metros en sentido contrario a la fosa y después recorre otros 10.5 metros hacia la fosa (Figura 4).
3. Cecilia recorre -10.5 metros y después 10.5 metros (Figura 5).
4. Cecilia recorre 10.5 metros hacia la fosa y salta 3.8 metros (Figura 6).

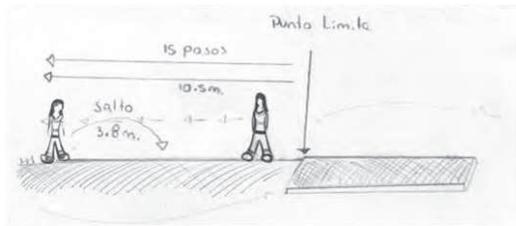


Figura 3. Representación de la situación 1

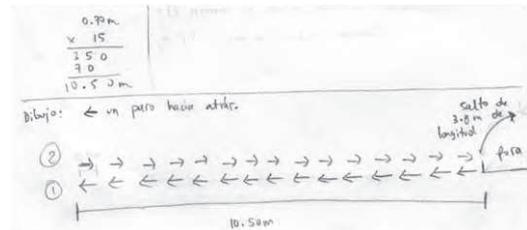


Figura 4. Representación de la situación 2

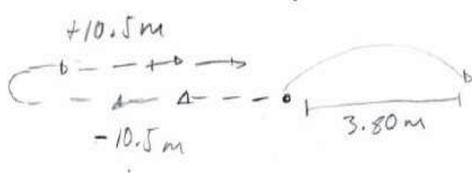


Figura 5. Representación de la situación 3

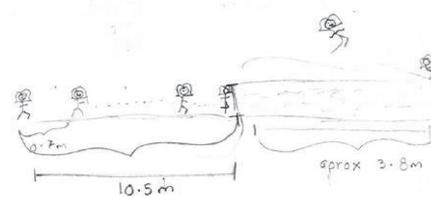


Figura 6. Representación de la situación 4

Análisis

Los resultados obtenidos en esta investigación son alarmantes si se considera que fue realizada con 122 estudiantes de una facultad de ciencias en su primer año de estudio. A casi un año de haber concluido el bachillerato y con algunos cursos de matemáticas a nivel superior, no queda duda de que estos estudiantes han trabajado bastante con números negativos y con varios tipos de problemas de matemáticas. Así pues, es justificable que volteemos la mirada al problema cuando buscamos las causas de tantas respuestas “erróneas”. Algunas de las causas las describimos a continuación. El contexto de este problema es una competencia deportiva la cual debería ser familiar a los estudiantes. Sin embargo, detectamos que algunos de ellos la confundieron con una de salto de altura, mientras otros no sabían qué era la fosa.

Por otro lado, el autor del problema afirma que “Cecilia camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa”. Este es un movimiento inusual en el salto de longitud y ubica a este problema como no auténtico, de acuerdo a la clasificación de Palm (2006), pues el evento que se describe no es real. Tal vez por esta razón 32 estudiantes la seleccionaron como una frase incomprensible. La base de texto de este problema no puede ser construida adecuadamente por la mitad de los

estudiantes debido entonces a problemas con el contexto ya que no se cuenta con suficiente información para relacionar lo que ahí se describe. Por ejemplo, el recorrido antes del salto no es asociado a un número negativo. Esta palabra es entendida como distancia, por lo que se considera positiva. En los modelos tradicionales de enseñanza de números negativos aparece la posición (en la recta real, en elevadores, etc.) como un significado o una aplicación de estos números. Por esto es que en esta investigación hemos preferido usar esta última palabra y hemos mejorado los resultados, aunque la mejora alcanzada es realmente baja. Creemos que se debe modificar aún más el enunciado del problema y el contexto para obtener un aumento significativo de respuestas con un número negativo.

Conclusiones

El problema aquí estudiado nos ha servido para observar el proceso que siguen los estudiantes para construir el modelo de la situación de un problema contextualizado. Del análisis realizado concluimos que la base de texto del problema impide, en casi la mitad de los estudiantes, la construcción de un modelo situacional aceptable y que ésta es la razón por la que no se obtiene el resultado esperado. Por otro lado, el problema pide un “número con signo” el cual es un término poco conocido según lo manifestaron los propios estudiantes. Algunos dieron como respuesta un signo negativo o positivo. La palabra “recorrido” también genera confusión en el enunciado pues no evoca el significado de número negativo. Las respuestas con signo negativo consideramos que fueron motivadas por la frase “camina 15 pasos en sentido contrario”.

Para comprender un problema verbal de matemáticas los estudiantes deben poder crear una representación mental de la situación que plantea el texto. En este trabajo hemos tenido la oportunidad de visualizar estas representaciones a través de los dibujos realizados por los estudiantes y también hemos podido comprobar la importancia de la base de texto.

Como una implicación de este trabajo a la enseñanza de las matemáticas debemos llamar la atención, de quienes elaboran los problemas contextualizados de matemáticas, acerca de la necesidad de un uso correcto del lenguaje y de descripciones precisas de la situación con el fin de permitir en los estudiantes la construcción de las diferentes etapas por las que debe transitar hacia la solución del problema.

Consideramos que esta investigación será de gran ayuda para los profesores que deben seleccionar los problemas y de preparar las posibles intervenciones de su parte antes de presentarlos a los estudiantes

Este trabajo se realizó como parte del proyecto “La contextualización en la educación matemática: el diseño de los problemas y las estrategias de solución de los estudiantes”, apoyado por la VIEP de la BUAP en el año 2011

Referencias bibliográficas

- Ainley, J. (2012). Developing purposeful mathematical thinking: a curious tale of apple trees. *PNA*, 6 (3), 85-103.
- Arriaga, A., Benítez, M. M. y Cortés, M. C. (2008). *Matemáticas 2, Introducción a las competencias. Educación Secundaria*. México: Pearson Educación.
- Bickmore-Brand, J. (1993). Implications from Recent Research in Language Arts for Mathematical Teaching. In J. Bickmore-Brand (Ed.), *Language in mathematics* (pp.1-9). Portsmouth, NH: Heinemann.
- Font, V. (2006), Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía* 355, 52-54
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland: D. Reitel.
- Hernández, L. A., Rodríguez, F. J. y Slisko, J. (2010). Las dificultades de los estudiantes de secundaria al resolver un problema que involucra los números con signo: una interpretación ontosemiótica. *Memorias del VIII Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: CVEM 2010*.
- Kintsch, W. & van Dijk, T. A. (1978). Toward a Model of Text Comprehension and Production. *Psychological Review* 85 (5), 363-394.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A Paradigm for Cognition*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Kulm, G. (1984). The Classification of Problem-Solving Research Variables. En G. A. Goldin & C. E. McClintock (editores.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp.1-21). Philadelphia: The Franklin Institute Press.
- Palm, T. (2006). Word Problems as Simulations of Real-World Situations: A Proposed Framework. *For the Learning of Mathematics*, 26 (1), 42–47.
- PISA. (2003). Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills-Publications 2003. Recuperado el 3/03/2011, de http://www.oecd.org/document/29/0,3746,en_32252351_32236173_33694301_1_1_1_1,00.html

- Ramos, A. B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535-556.
- Schwarz, B. B., Kohn, A. S. y Resnick, L. B. (1994). Positives about Negatives: A Case Study of an Intermediate Model for Signed Numbers. *The Journal of the Learning Sciences* 3 (1), 37-92.
- Voyer, D. (2011). Performance in Mathematical Problem Solving as a Function of Comprehension and Arithmetic Skills. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9 (5), 1073-1092.
- Wiest, L. (2001). The Role of Fantasy Contexts in Word Problems. *Mathematics Education Research Journal*. 13 (2), 74-90.