CONSTRUCCIÓN DEL ESQUEMA MENTAL PARA LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL

Karla Liliana Puga Nathal, Eduardo Miranda Montoya
Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán México
ITESO
karlalpn4@hotmail.com, emiranda@iteso.mx

Resumen. El trabajo que se presenta muestra los avances de una investigación con la que se espera obtener un acercamiento teórico a un esquema mental, –desde el marco de referencia APOE– para la apropiación del concepto de la Integral, para ello se pretende explorar, describir y explicar los niveles de construcción intra, inter y trans que subyacen en la apropiación del concepto. El trabajo se desarrolla dentro del paradigma constructivista, donde se concibe que el conocimiento se construye a partir de la interacción sujeto–objeto (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 2004), se destaca que la experiencia resultante de esta interacción desencadena una serie de estructuras mentales que le permiten al sujeto generar deducciones en torno al objeto.

Palabras clave: esquema, APOE, nivel

Abstract. The document shows the progress of an investigation which is expected to obtain a theoretical approach to a mental scheme from the APOE framework for the appropriation of the concept of Integral. With this in mind, we pretend to explore, describe and explain the levels of building intra, inter and trans, underlying of the concept. The research is developed within the constructivist paradigm, that explain the knowledge is arising from the subject-object interaction (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews and Thomas, 2004), emphasizing that the experience resulting from this interaction prompts a number of mental structures that allow the subject generates inferences about the object.

Key words: scheme, APOS, level

Problema de investigación

La presente investigación, –aun en etapas primarias–, surge en el marco de una reforma educativa en la que se convino reformular los programas de estudio de educación superior y adoptar el enfoque basado en competencias. Dentro de estas reformas se incluyen los cursos de matemáticas, en los cuales se observa que todavía son escasos y superficiales los trabajos que han realizado las universidades en torno al enfoque por competencias para tal disciplina, sin embargo la presente investigación considera que dentro un sistema educativo con un enfoque en base a competencias o no, las matemáticas en la vida de un estudiante universitario deben ser vistas como herramientas que le permitan entender, explicar, discernir y tomar decisiones –fundamentadas– de su entorno sea escolar, familiar o social. En estos planteamientos se potencia la necesidad de que los estudiantes universitarios desarrollen la capacidad de *matematizar* problemas situados sea en su contexto escolar, social o laboral.

Matematizar en términos generales, se refiere a la capacidad del sujeto de trasladar un problema del mundo real al de las matemáticas para que en éste analice, razone y una vez resuelto, comunique las ideas matemáticas que darán respuestas desde la perspectiva del mundo real (Rico, 2003). El trabajo parte de la premisa de que, para matematizar, deberán estar presente la comprensión de los *conceptos matemáticos*, si el sujeto no se apropia de estos, difícilmente podrá ubicar un problema situado dentro de algún campo de las matemáticas, de hecho difícilmente sabrá que puede interpretar y resolverlo haciendo uso de esta herramienta.

Tratamiento de un concepto complejo: la integral

Por otro lado, en la universidad, a diferencia de los niveles escolares de formación básica, los conceptos son más complejos y abstractos (Planchard, 2007), por ejemplo en los libros de matemáticas un concepto se define desde registros de representación numéricos, algebraicos, contextuales y geométricos. Entonces es necesario que el concepto sea construido desde sus distintos registros o marcos de representación, de acuerdo con Camarena (2010): numérico, algebraico, analítico, contextual y geométrico, este último incluye gráficas, diagramas, esquemas y dibujos, ya que en el proceso de matematización muchas veces es necesario transitar entre esos diferentes registros.

En los diversos cursos de matemáticas que se ofertan en las escuelas de nivel superior, se incluyen una gran cantidad de conceptos, todos importantes sin embargo, algunos de estos son medulares para la construcción de otros conceptos y en la formación matemática futura de un sujeto, ejemplo de ello es el concepto de *la Integral*, que se estudia en los primeros semestres de las carreras de ingeniería y que es el foco de atención para el presente trabajo.

La Integral como objeto matemático comúnmente es utilizada en los programas educativos de matemáticas de ingeniería para resolver problemas relacionados con cantidades infinitesimales, en las que se requiere, por un lado sumas infinitas de cantidades finitas, y por otro lado el desarrollo de los métodos de cuadratura, a los que Newton llamó método inverso de las tangentes. La suma de la acumulación de áreas, es un tema que explícitamente no se ve con frecuencia en los libros de cálculo ni en las estrategias didácticas que se sugieren en algunos planes de estudio (CUCEI, 2010; UNAM, 2004; SNEST, 2008), sin embargo en los cursos posteriores de matemáticas, como ecuaciones diferenciales y física, que pertenecen a la formación básica del futuro ingeniero la idea de función primitiva y la suma de la acumulación de cantidades son importantes para entender ciertos fenómenos tales como: enfriamiento de cuerpos, las leyes del movimiento de partículas, termodinámica, trabajo y energía, cinemática, costo marginal, crecimiento y decrecimiento poblacional, por mencionar algunos.

Por otro lado, es común que los estudiantes de ingeniería requieran muestrear datos de algún fenómeno y obtener razones de cambio, ejemplo de ello es el enfriamiento de un horno, en determinados instantes de tiempo se registra la variación de la temperatura respecto del tiempo y con ello se describe su temperatura. Evidentemente el estudiante solo cuenta con datos numéricos, si ubica esas razones de cambio en el plano cartesiano y además ha comprendido el sentido geométrico de la función primitiva a partir de la acumulación de áreas o desde la recta tangente, podrá encontrar una curva que muestre información suficiente para entender, describir y predecir el comportamiento de la temperatura del horno en determinado tiempo, sin necesidad de pasar por algoritmos algebraicos, que sería el camino más popular para resolver este tipo de problemas.

Algunos libros (por citar algunos Boyce y Diprima, 1994; Larson, Hostetler, y Edwards, 2009; Leithold, 1983; Purcell, Varberg y Rigdon, 2001; Stewart, 2008; Swokowski, 1989 y Zill, 1987) citados en los programas de estudio de algunas escuelas mexicanas formadoras de Ingenieros, se observa que la Integral es tratada desde diversos enfoques: es el área limitada por curvas, es un límite específico, es la operación inversa a la derivada, es el trabajo que realiza una fuerza, es la longitud de una curva, es el volumen de un sólido, es la función primitiva, sin embargo, en párrafos anteriores se resaltó la idea que en matemáticas, a diferencia de otros campos del conocimiento, los conceptos matemáticos se deben entender desde diferentes registros o campos representación, entonces, dado los diferentes enfoques que se le asignan al concepto, se torna necesario conocer los registros en los que deberá ser estudiada la Integral, al respecto algunos autores que hacen alusión a diversos registros, Souto y Gómez (2010) mencionan que para entender el concepto de la Integral, se deben coordinar diferentes registros de representación, al respecto se rescata: registro analítico, registro visual y numérico.

Ordóñez y Contreras (2010) en su investigación, centran el concepto de la "Integral Definida" en distintos registros de representación desde lo que ellos llaman *componente epistémica de la Integral Definida*, esto es, los distintos significados que se le asignan al concepto. Los autores mencionan que la integral definida es tratada desde una idea estática (registros de representación numéricos): cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco, densidad, presión, intensidad de un campo magnético, que surge a partir de la idea de sumar cantidades infinitamente pequeñas; así como registro de representación algebraico.

Se destaca, como producto de una revisión bibliográfica que la Integral es abordada desde los siguientes registros de representación:

(1) Algebraico (algorítmico): se refiere a procesos algorítmicos como el uso de tablas o fórmulas.

(2) Visual (Geométrico, Gráfico): Se refiere a figuras geométricas y gráficas de funciones a las que se recurre para explicar la idea de Integral como la sumatoria de cantidades infinitas y al estudio de las funciones primitivas.

(3) Aritmético: esto es, a la operación que implica realizar la suma de cantidades infinitamente pequeñas.

(4) Numérico: se refiere a lo que representa el número que se obtiene como resultado de un proceso de integración, Esto es, qué representa la constante que se obtiene al resolver una integral definida.

Por otro lado, algo que escasamente se observa en los libros citados de cálculo, es el énfasis entre la relación geométrica entre la Integral y la Derivada lo que para la presente investigación se considera esencial, dado que si el estudiante comprende esta relación, principalmente desde un registro geométrico, estará posibilitado para interpretar diferentes fenómenos físicos: la obtención de una función desplazamiento a partir de la función velocidad, la obtención de una función trabajo a partir de la representación geométrica de una fuerza variable, aplicaciones de la Integral dentro del campo de la física y matemáticas superiores que estudian los Ingenieros, la cual permite resolver problemas relacionados con la compresión y estiramiento de resortes, bombeo de líquidos en recipientes de diferentes formas geométricas, entre otras aplicaciones.

La historia da cuenta de la trascendencia que dentro de las matemáticas tienen los registros de representación geométricos, sin embargo diversas investigaciones explican algunas dificultades que existen en el énfasis estas representaciones dentro del aula. Al respecto, Cortes (2011) menciona que los registros de representación numérico, algebraico y gráfico son "…representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto" (p.1). Además la representación visual de un concepto generalmente es incluida por el profesor cuando explica tal concepto y enlaza la representación algebraica del mismo, la cual permanece en la mayoría del tiempo que se dedica a estudiar el concepto.

Algunos investigadores (Cortés, 2011; Hitt, 2003) enfatizan en la importancia que tienen las relaciones visuales en la construcción de diferentes conceptos matemáticos como el infinito, límites, derivada, Integral, al respecto Hitt (2003), menciona:

> "… si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo. Es difícil concebir que

un alumno pueda entender el cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos del cálculo" (p. 1).

Un estudiante de Ingeniería debe comprender conceptos matemáticos desde sus diferentes registros de representación (visual, aritmético, numérico, algebraico) dado que dependerá del contexto de la situación problema la elección del registro pertinente para la manipulación de cantidades y obtención de la solución correspondiente. Existen propuestas didácticas que sustentan y describen la apropiación del concepto de la Integral (Boigues, 2010; González y Aldana 2010; Delgado, 2009; Morales, 2009; Souto y Gómez, 2010 y Crisóstomo, 2011) que relacionan registros geométricos con numéricos, algebraicos con algebraicos y algebraicos con numéricos, pero al momento no se ha encontrado un mecanismo –con fundamentación teórica y metodológica– que posibilite documentar cuáles son los niveles de construcción de las estructuras mentales que desarrolla el sujeto para la comprensión del concepto de la Integral desde un registro geométrico (acumulación de cantidades que varían) a otro registro geométrico (la gráfica de una función primitiva), entonces la investigación tiene como objetivo responder a la pregunta ¿Cómo un estudiante universitario construye el concepto de la Integral?, además ¿Qué construcciones mentales previas moviliza el estudiante universitario para conformar las estructuras necesarias que faciliten la comprensión del concepto de la Integral a partir de registros de representación visual?

Marco teórico

La investigación se ubica dentro del paradigma constructivista, específicamente la teoría psicogenética de Piaget la cual afirma que el conocimiento surge de la interacción sujeto–objeto (Dubinsky, 1991). La experiencia que resulta de esta interacción desencadena una serie de estructuras mentales que le permiten al sujeto generar deducciones en torno al objeto. Piaget explica que en la reorganización de los diferentes niveles de los estadios del conocimiento existen dos mecanismos la *abstracción empírica*, en la que se destaca el conocimiento físico que extrae y analiza el sujeto del objeto, y la *abstracción reflexiva*, la cual se manifiesta a partir de las acciones y operaciones físicas y mentales que el individuo realiza sobre un objeto. La abstracción reflexiva se refiere a "las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conducen a construir" (Piaget y García, 2004, p. 247).

La abstracción reflexiva surge a partir de dos procesos, el primero, llamado *reflejamiento,* se refiere a que el individuo es capaz de establecer representaciones (o proyectar) de un estadio inferior (actual) de conocimiento a uno superior a partir de las acciones que haya realizada sobre un objeto (de la acción a la representación). El segundo se refiere a una *reflexión,* esto es, a la reconstrucción y reorganización de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras mentales. En los procesos de reorganización para la consolidación de estadios mentales superiores el individuo debe recurrir a estadios mentales inferiores, por lo que la adquisición de conocimiento no se da en forma lineal.

Los esquemas son sistemas mentales organizados en acciones o pensamientos que le permiten al individuo representar de manera abstracta los objetos y eventos de su mundo. Todos los seres humanos poseemos esquemas de pensamiento y mientras que el individuo sea capaz de organizar y desarrollar esquemas nuevos, mejor será su *interpretación* y *adaptación* a su entorno (Piaget y García, 2004).

Piaget y García (2004, p. 33) caracterizan en tres niveles la construcción de un esquema mental:

a) Nivel Intra: Se refiere a que el sujeto ha logrado un esquema a un nivel operatorio, pero no logra de manera independiente generalizar estas operaciones o establecer relaciones con otras, en consecuencia el nuevo esquema se considera aislado, desvinculado de otros esquemas.
b) Nivel Inter: Una vez que se logra la construcción de un esquema a nivel operatorio (intra) y el sujeto internalice estas operaciones se dice que el esquema adquiere un nivel inter, en este momento el sujeto, en su mente, es capaz de generalizar y desarrollar las operaciones, sin necesidad de instrucciones que provengan del exterior.
c) Nivel trans: Cuando el individuo logra trasladar el esquema y vincularlo con otros lo cual conduce a la construcción de estructuras.

Las ideas de Piaget sobre la adquisición del conocimiento ha inspirado la generación de propuestas teóricas, cuyo objeto de estudio es la construcción del conocimiento matemático, tal es el caso de APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas) desde donde se pretende describir, entender y documentar cómo un estudiante de nivel superior (y medio superior) construye un concepto matemático.

La idea de la manipulación de objetos físicos que establece Piaget para las primeras etapas de la construcción de conceptos, son tratados, desde la perspectiva de APOE como manifestaciones no solo físicas (debido a la complejidad de los conceptos matemáticos avanzados) sino como manipulaciones de objetos mentales (Asiala et al, 2004). APOE propone elementos que permiten reflexionar sobre la comprensión de un concepto matemático, además de elementos didácticos para su instrucción, para ello es necesario acercarse al concepto desde su epistemología, visto desde las matemáticas mismas, para ello APOE propone lo que denomina *descomposición genética* del concepto, esto es, “un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo un concepto se puede desarrollar en la mente de un individuo" (Asiala, et al., 2004, p.5).

Entonces el desarrollo de la comprensión de un concepto inicia cuando el sujeto realiza, –lo que significa la parte medular de la teoría APOE–, *acciones* sobre objetos matemáticos (Dubinsky & Lewin, 1986) ya que es a través de las acciones que el sujeto se acerca al objeto de conocimiento, a partir de un proceso dialéctico logra internalizar *procesos* para que estos sean encapsulados en *objetos* matemáticos, los cuales se espera sean desencapsulados y regresados a su estado inicial y con esto integrar un *esquema*. Cuando el sujeto es capaz de manipular tales objetos, se desencadenan una serie de procesos mentales que pueden ser descritos a partir de lo que Piaget en la construcción del conocimiento lógico–matemático llama *abstracción reflexiva* (Dubinsky & Lewin, 1986).

Desde APOE, un esquema involucra las construcciones personales de las acciones, los procesos, los objetos (e incluso el uso de otros esquemas) para la comprensión de determinado concepto matemático, estos a su vez están interconectados en la estructura mental del individuo (estas conexiones pueden ser conscientes o inconscientes). Para formar el esquema para la comprensión de un concepto matemático, es necesario organizar en forma estructurada, una colección de procesos y objetos (Trigueros, 2005).

Metodología

Para entender el objeto de estudio y contestar las interrogantes que surgen en la investigación, y en sintonía con el marco teórico en que se encuentra ubicado su objeto de estudio, se considerará incluir el *método crítico (o método de exploración crítica)*, ya que este propone un estudio transversal, basado en técnicas de observación y exploración, de las construcciones mentales de un individuo, a partir del establecimiento de una relación dialéctica entre el investigador y el sujeto.

El método de exploración crítica (Inhelder, Sinclair y Bovet,1996), ubicado en el paradigma constructivista, es propio de la Psicología Genética, sus raíces se encuentran en el método clínico que originalmente fue utilizado por Piaget para indagar cómo un sujeto construye su conocimiento. El método posibilita establecer una relación dialéctica entre el entrevistador y el entrevistado que permita indagar sobre las construcciones mentales, con la finalidad que este último exprese los "por qué" de sus manipulaciones y conclusiones, sus percepciones sobre el objeto, sus dudas, y a partir de sus respuestas se generen nuevas preguntas para el investigador.

A manera de conclusión

Se pretende establecer una metodología con un enfoque cualitativo con doble finalidad, la primera describir los niveles intra, inter y trans por los que transita un sujeto para la apropiación del concepto de la Integral y como producto de tales descripciones se propondrá desde el marco de APOE una descomposición genética del concepto de la Integral que promueva la apropiación de este último, con lo que se pretende impactar en el campo de la didáctica de las matemáticas, –específicamente en el terreno del Cálculo Integral– dado que se aportarán elementos, reflexiones y resultados al estado del conocimiento en torno a la descripción de las estructuras mentales que moviliza el sujeto y que promueven la construcción de esquemas cognitivos para la apropiación del concepto de la Integral.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K., (2004). *A Framework for Research a Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de: http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf

Boigues, F. (2010). *Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería*. Recuperado el 24 de febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Camarena, P. (2010). Las matemáticas en el contexto de las ciencias. *Revista INNOVACIÓN Educativa*, 46(9), 15-25.

Cortés, C. (2011). Diferencias y Acumulación vs Derivada e Integral. Por publicarse.

CUCEI. (2010). Planes y progrmas de estudio. Recuperado el 10 de Octubre del 2010 en: http://www.cucei.udg.mx/portal/index.php

Crisostomo, E. (2011). Conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre la didáctica del cálculo. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Delgado, M. (2009). Matemática visual: Simulaciones relativas al Teorema Fundamental del Cálculo. El Cálculo y su Enseñanza. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Recuperado el 12 de abril del 2011 de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Em3v4rTYf11.pdf

Dubinsky, E., Lewin, P. (1986), *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*. Recuperado el 12 de Febrero del 2010 de:

http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20-%20Refereed

Dubinsky, Ed. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20 Mathematics%20Education%20- %20Refereed

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3, (1). 47 – 70.

González, T. y Aldana, E. (2010). *Comprensión de la Integral Definida en el marco de la Teoría APOE*. 4-22. Recuperado el 24 de Febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Hitt, F. (2003) Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Memoria del XI encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel medio superior*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Michoacán, México.

Inhelder, B., Sinclair, H. y Bovet, M. (1996). *Aprendizaje y Estructuras del Conocimiento*. Madrid: Ediciones Morata.

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (2009). *Cálculo Integral*. México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1983). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: FEM.

Ordoñez, L. y Contreras, A. (2010). La Integral Definida en las Pruebas de Acceso a la Universidad (pau): Sesgos y Restricciones en la Enseñanza de este objeto en 2o de bachillerato. M*emoria de la Sociedad Española de Investigación en educación Matemática. 23-41*

Paschos, T. & Farmki, V. (2006). *The Reflective Abstraction In The Construction Of The Concept Of The Definite Integral: A Case Study*. Recuperado el 2 de Febrero del 2011 de: ftp://ftp.emis.de/pub/EMIS/proceedings/PME30/4/337.pdf

Piaget, J. y García, L. (2004), *Psicogénesis e Historia de las ciencias*. (10ª Edición). México: Siglo XXI Editores.

Purcell, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2001). *Cálculo*. México: Prentice Hall.

Rico, L. (2003). *Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003, Proyecto Pisa 2003*. Recuperado el 15 de Junio de 2009 de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2756510

SNEST. (2008). Tomado el 23 de marzo del 2010 de: http://www.dgit.gob.mx/index.php/quienes_somos/informacion/snest.html

Souto, B., Gómez, I. (2010). Comprensión visual y concepto de la Integral en la enseñanza universitaria. *Memoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. 80-94.

Stewart, J. (2008). *Cálculo, trascendentes tempranas*. México: CENGAGE learning.

Swokowski, E., (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo editorial Iberoamérica

Swokowski, E., (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. (2ª edición). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Revista Educación matemática, 1(17),* 5-31.

UNAM. (2010). *Planes de estudio para las carreras de Ingenierías*. Recuperado el 10 de Octubre del 2010 de: https://www.dgae.unam.mx/planes/carrera.html

Wenzelburger, E. (1994). *Didáctica, Calculo Integral*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zill, D., (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.