# CONOCIMIENTO ADQUIRIDO Y EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO: IMPLICACIONES PARA EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Fausto Mendoza Díaz, Ignacio Garnica Dovala, Héctor Chávez Rivera, Ana María Ojeda Salazar
Instituto Politécnico Nacional, DME Cinvestav México
rerg2002@yahoo.com.mx, mendizf@hotmail.com, igarnica@cinvestav.mx, chavez_santiago@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx

**Resumen.** Con una perspectiva cualitativa, se realizó una indagación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas en el aula, mediante la referencia al círculo unitario, en paralelo con una investigación de los fundamentos cognitivos respectivos, de 104 estudiantes de tres grupos del segundo semestre de bachillerato tecnológico. La aplicación de un cuestionario de investigación y de otro de indagación, así como de cinco entrevistas clínicas, ubicó al conocimiento adquirido previo de los estudiantes requerido para el tema de esa enseñanza en el nivel 0 del modelo de Van Hiele y reveló la prevalencia de procedimientos automatizados de pre-álgebra, que evidenciaron la ausencia de las nociones de geometría en foco. Los resultados sugieren un examen acucioso del programa de estudios.

**Palabras clave**: conocimiento adquirido, círculo trigonométrico, bachillerato

**Abstract.** From a qualitative point of view, an inquiry on the process of the teaching-learning of trigonometric functions by using the unit circle was carried out in three second semester classrooms of the technological preparatory, with 104 students, simultaneously with a research of their corresponding cognitive bases. According to the data collected with two questionnaires, one for research and another for an inquiry, as well as with five clinical interviews, the students' previous knowledge required for the teaching of that subject was situated at level 0 of Van Hiele's model. The data collected also revealed the prevalence of pre-algebra automated procedures, which showed the lack of the notions of Geometry in focus. The results pointed to a detailed examination of the syllabus of the corresponding grade.

**Key words**: acquired knowledge, trigonometric circle, high school

## Introducción

El conocimiento adquirido en los cursos previos al ingreso a la Educación Media Superior es determinante para el futuro desempeño del sujeto. Por ello, para conocer los rasgos del desempeño académico de estudiantes del primer año de bachillerato tecnológico mexicano, se realizan acciones de naturaleza dual: de indagación de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula y de investigación de sus fundamentos cognitivos. Esta investigación se realiza en condiciones institucionales de aula y se enfoca en el círculo unitario.

La estrategia de enseñanza para introducir las funciones trigonométricas se basó en el círculo trigonométrico. En consecuencia, el interés de la investigación se centró en identificar el conocimiento adquirido por los estudiantes de las bases del tema de círculo trigonométrico antes de su empleo en la enseñanza de las funciones trigonométricas. En tanto, el interés de la indagación fue identificar la aplicación de nociones del círculo trigonométrico para responder preguntas relativas a situaciones en general tratadas durante la enseñanza previa a la de las funciones trigonométricas.

## Marco de referencia

Como referentes de la presente investigación, se consideran la producción teórica referida al razonamiento geométrico y la propuesta de la modalidad bivalente del bachillerato, denominada bachillerato tecnológico porque prepara al estudiante tanto para una carrera técnica como para acceder al nivel superior.

## Modelo Van Hiele

Diversos autores (por ejemplo, Fuys & Geddes, 1984) han recurrido a la propuesta de Van Hiele (1957) para el estudio del pensamiento geométrico. Los primeros plantean que, con la enseñanza apropiada, ese pensamiento del estudiante evoluciona en cinco niveles: Nivel 0: identifica, nombra, compara y opera sobre figuras geométricas; Nivel 1: analiza figuras en términos de sus componentes y sus relaciones y descubre propiedades o reglas de una clase de formas empíricamente; Nivel 2: siguiendo o dando argumentos informales, interrelaciona lógicamente propiedades o reglas descubiertas previamente; Nivel 3: prueba teoremas deductivamente y establece interrelaciones entre redes de teoremas; Nivel 4: establece teoremas en diferentes sistemas de postulados y analiza o compara estos sistemas. Este modelo ha derivado en lineamientos, correspondientes a los niveles citados, para la enseñanza de la Geometría, a saber: preguntas/información, orientación dirigida, explicación (explicitación), orientación libre, integración (Fouz y de Donosti, sf).

## Propuesta institucional

El curso *Geometría y Trigonometría* (Dirección de Educación Media Superior del IPN, 2008) se imparte en el segundo semestre del bachillerato tecnológico, con el objetivo de "aplicar conocimientos matemáticos a situaciones diversas que puedan presentarse a fenómenos y procesos propios de las ciencias exactas y sociales" (p. 3). El curso está constituido por tres unidades: *Funciones exponenciales y logarítmicas* (Unidad I), *Geometría Euclidiana* (Unidad II) y *Trigonometría* (Unidad III). En particular, esta última tiene el propósito de que el estudiante emplee "… las funciones trigonométricas en la solución de triángulos y ecuaciones que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal y/o social" (p. 3).

El círculo trigonométrico se propone al docente como estrategia de enseñanza de la tercera unidad, en actividades en las que él: "Expone las funciones trigonométricas a partir del círculo unitario y sus respectivas gráficas" (p. 13). El conocimiento relativo al círculo y a la circunferencia es contenido de la segunda unidad. En ésta se especifica, como actividades sustantivas de aprendizaje, la identificación de "los elementos relevantes del triángulo, polígonos, circunferencia y círculo" (p. 11); y, como evidencia de este aprendizaje, la representación y reconocimiento "de las características particulares de: triángulos, polígonos, circunferencia y círculo" (p. 11). De entre los criterios de evaluación de esta unidad, la propuesta indica que el estudiante realice "inferencias de tipo geométrico a partir de las características de: triángulos, polígonos, circunferencia y círculo" (p. 11).

El conocimiento básico del círculo trigonométrico implica el de la definición del círculo, sus componentes y las relaciones entre ellas (centro, radio, radián, longitud de la circunferencia, cuerda, diámetro, tangente a una circunferencia, ángulos centrales, su medida en radianes y en grados, y las razones trigonométricas). Consideramos a esas componentes y relaciones en las categorías de forma y figura, medición y relaciones.

## Métodos e instrumentos

De forma cualitativa y *en curso* (véase en www.matedu.cinvestav.mx/~cognicion), se llevaron a cabo una investigación y una indagación con las características siguientes.

### Escenarios y participantes

El seminario "Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico" conjugó la investigación y la indagación de la docencia en matemáticas en esa modalidad educativa, mediante reflexiones y acciones de sus integrantes (investigadores y docentes), relativas a la enseñanza de las matemáticas en condiciones institucionales de aula. En este seminario se discutieron y acordaron los objetivos y los métodos e instrumentos por aplicar en el aula y en la sala de interrogatorios (cámara Gesell), se analizaron los datos recopilados e identificaron los resultados obtenidos de ese análisis.

Participaron en la investigación 104 alumnos, con edades de entre 14 y 17 años, de tres grupos del CECyT No. 4 Lázaro Cárdenas, del Instituto Politécnico Nacional, en México, D. F., en las aulas del curso *Geometría y Trigonometría* del 2° semestre, dos docentes titulares y tres investigadores.

### Instrumentos y técnicas

Se diseñaron dos cuestionarios, uno de investigación (**I**) y otro de enseñanza (**E**), para identificar el conocimiento adquirido de los estudiantes requerido antes de la enseñanza de las funciones trigonométricas mediante el círculo unitario. Los cuestionarios, impresos en papel, se contestaron individualmente con lápiz o pluma en el aula de matemáticas a la hora habitual de clase. Por las respuestas obtenidas con ellos y por la disposición mostrada por tres estudiantes, se aplicaron a éstos cinco entrevistas en cámara Gesell, a manera de clínica, para profundizar sobre su comprensión de los conceptos requeridos por el círculo trigonométrico. Las entrevistas, de una hora de duración, se videograbaron y transcribieron.

### Cuestionario I

El objetivo general de este instrumento fue obtener datos sobre el estado de conocimiento de espacio y forma adquirido por estudiantes que inician un proceso de aprendizaje del tema de las funciones trigonométricas. Se plantearon 15 reactivos con preguntas abiertas, en tres secciones, a contestar cada sección en 15 min (véase la Tabla 1).

Las situaciones de referencia para contestar los reactivos se presentaron con figuras y/o lengua escrita y la tercera sección incluyó, además, tres arreglos en tablas.

Tabla 1. Caracterización del Cuestionario I.

| Sección | Objetivo: Reconocer | Contenido | Reactivos | Acciones requeridas |
|---|---|---|---|---|
| **Figura y forma** | Propiedades geométricas sin sistema de referencia.<br>Relaciones formales básicas. | Alturas de triángulos, la circunferencia, su longitud, ángulos centrales. Circunferencia y recta tangente. Ángulos y lados de figuras triangulares. | 1, 2, 3, 4 y 5<br>6, 7, 8 | Trazar.<br>Identificar.<br>Expresar en lengua escrita y la notación angular.<br>Usar símbolos geométricos. |
| **Medición** | Propiedades de la medida. | Longitud de figuras abiertas irregulares, de un trapezoide irregular y de figuras cerradas regulares; del círculo, de arco, de la circunferencia; noción de $\pi$. Ángulo central en grados y en radianes. | 1, 2, 3, 4, 5 | Trazar. Expresar en lengua escrita y notación de medidas angulares.<br>Contar unidades, calcular longitud con teorema de Pitágoras. |
| **Relaciones trigonométricas** | Propiedades y relaciones en triángulos rectángulos. | Suma de ángulos internos; razones entre lados, sus nombres, ángulos asociados y su medida. | 1, 2, 3, 4, 5 | Nombrar. Expresar en lengua escrita. Convertir unidades angulares. Calcular longitud con teorema de Pitágoras y ángulos a partir de lados. |

### Cuestionario E

Este instrumento es de los que se aplican por norma a los alumnos de los CECyTs del IPN; contuvo 17 reactivos (véase la Tabla 2) y se le contestó en una hora. El objetivo general fue identificar los conocimientos adquiridos como requisito para cumplir los objetivos que propone la Unidad de Aprendizaje Geometría y Trigonometría.

### Guiones de entrevistas I, E

En ambos casos se consideró el contenido de cada cuestionario, I o E, aplicado. Para la entrevista I de investigación se tomó en cuenta lo siguiente:

*Figura y forma*. Alturas del triángulo; ubicación del centro de la circunferencia; longitud de una cuerda; longitud de una circunferencia y de un arco [$2\pi r$; $r\theta$]; si $l = 2\pi$ entonces $r = ?$; noción de tangencia (cómo asegurar que el punto es único); los valores de los ángulos interiores de figuras formadas por triángulos (noción de semejanza).

*Medición.* Cálculo de: la longitud de cierta trayectoria; el área del círculo dada la longitud de su circunferencia, de $l = 2\pi r$ a $A = \pi r^2$; la medida del ángulo que subtiende un arco de longitud $r$; el perímetro de figuras que requiera del teorema de Pitágoras. Conversión de radianes a grados y su representación en el círculo.

Para la entrevista E de enseñanza se hizo especial énfasis en la solución de problemas relativos a razón y semejanza.

*Forma y figura.* Elementos del triángulo rectángulo; noción de paralelismo.

*Medición.* El círculo unitario y medidas angulares en el plano cartesiano; suma de los ángulos interiores de un triángulo; semejanza de triángulos; cálculo de áreas y perímetros de figuras circulares y poligonales; aplicación del teorema de Pitágoras.

*Relaciones trigonométricas.* Identificación nominativa.

*Cálculo.* Resolución de problemas del triángulo rectángulo y de razón y semejanza.

Tabla 2. Caracterización del Cuestionario E.

| Sección | Objetivo: Reconocer | Contenido | Reactivos | Presentación |
|---|---|---|---|---|
| **Figura y forma** | Reconocer los elementos constitutivos (ángulos y nombre de catetos) del triángulo rectángulo | (8) Elementos del triángulo rectángulo | [8(a, b, c)] [*2;5*] | (8) Expresión escrita sin inclusión de figura |
| **Medición** | Reconocer los procedimientos para calcular la medida de: a) áreas compuestas; b) la longitud de perímetros y de lados de triángulos rectángulos. | (9) Medidas angulares en el círculo unitario; (11) Medida de la longitud de un cateto y la noción de semejanza | [9 (a, b, c); 10; 11] [*1;3;4;6;7*] | (9)Expresión escrita, con inclusión de figura circular en sistema cartesiano; (11) Figuras [dos triángulos rectángulos] |
| **Relaciones trigonométricas** | Reconocer la nominación de las funciones trigonométricas | (12) Nombre de las razones trigonométricas | 12 (a, b); | Expresión escrita sin inclusión de figura |
| **Elementos básicos** | Reconocer la propiedad de composición de áreas | (3) Áreas compuestas de figuras circular y cuadrilátera | 3, 6 | Expresión escrita con inclusión de figuras diferenciadas |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Cálculo** | Aplicar el teorema de Pitágoras y los criterios de semejanza al resolver un problema | (7) Triángulo rectángulo<br>(10) Razón de semejanza | 7, 10 | Expresión escrita con inclusión de la figura del triángulo rectángulo |

## Resultados del análisis

El análisis de los datos recopilados con los instrumentos de investigación referido al modelo de Van Hiele arrojó los siguientes resultados.

### Conocimiento previo adquirido

Del dato cuantitativo obtenido con el Cuestionario I resultó lo siguiente: el 70% de los estudiantes manifiesta una tendencia de aproximación a las características del nivel 0 del modelo de van Hiele; el 30% podría considerarse incluido en este nivel y sólo el 9% cubre la transición al nivel 1. De los datos cualitativos sobre el conocimiento adquirido de geometría elemental resultó lo siguiente:

*Figura y Forma.* 1) No se reconoce el sistema referencial para determinar las alturas del triángulo (véase ejemplo de respuesta en la Figura 1a); 2) La noción de que la intersección de dos diámetros define el centro de la circunferencia se manifiesta por dos acciones de doblar a contra luz la figura en el papel; 3) Se recurre al uso de instrumentos u objetos para medir; 4) Nueve casos reconocen la condición de tangencia; 5) Se reconocen los ángulos internos de triángulos rectángulos.

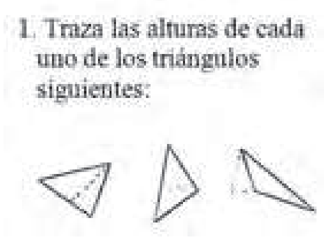


Figura 1a. Ejemplo de reactivo de Figura y forma

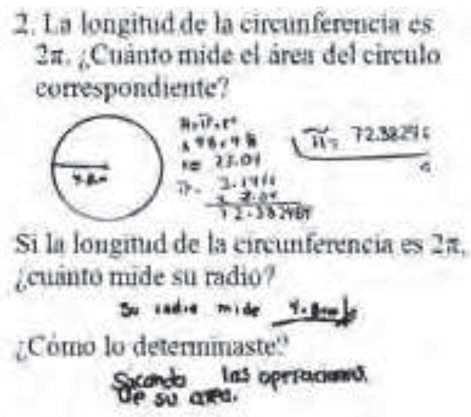


Figura 1b. Ejemplo de reactivo de Medición

*Medición.* 1) Casos aislados manifiestan ideas intuitivas para la medición de la longitud de curva; 2) La noción de $\pi$, ya sea como literal, como número irracional o como representación de la medida angular, se presenta sin sentido; 3) la representación de la medida angular en grados y en radianes está ausente; 4) no se reconoce la relación de la medida de la longitud de la circunferencia con su radio y $\pi$ (véase ejemplo de respuesta en la Figura 1b); 5) Las medidas de áreas y de lados se determinan con procedimientos confusos y argumentos inconsistentes.

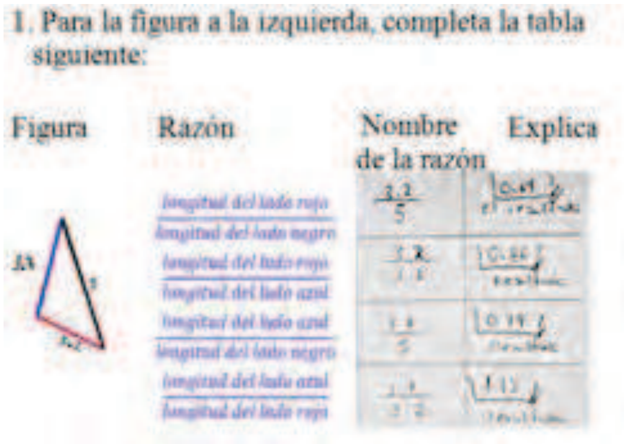


Figura 1c. Ejemplo de reactivo de Relaciones trigonométricas

*Relaciones trigonométricas*. 1) No se reconoce la razón geométrica entre los lados del triángulo rectángulo y las explicaciones manifiestan la ausencia de la noción en cuestión (véase ejemplo de respuesta en la Figura 1c).

## Entrevistas I

Los resultados obtenidos con el Cuestionario I se confirmaron en las tres entrevistas de investigación realizadas en cámara Gesell. En los pasajes siguientes, nos referiremos a los casos Al y Lo y hemos denotado por I la intervención del investigador.

*Figura y forma*. Al reconoce a los triángulos rectángulos, nombra sus lados e identifica ángulos rectos; también al cuadrado, con sus lados iguales y su área. Respecto a la circunferencia, la reconoce y a algunos de sus elementos, como radio, diámetro y arco, pero no a la cuerda. Sus respuestas exhiben la inestabilidad de sus conocimientos.

Al Bueno, ya éste …. Éste mide noventa.

I ……. Más o menos. Fíjate, eso te complica, porque … es decir, más o menos, [inentendible] … poco más, poco menos, ésta … ¿cómo se llama esta parte, cómo se llama esto? [Señala con el lápiz en la Figura 2a) en donde más o menos serían 60°. Señala a continuación con la punta del lápiz los extremos de tres arcos subtendidos por los ángulos marcados por Al].

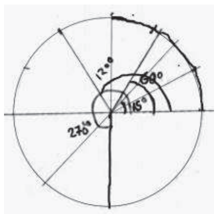

Figura 2a). Caso Al.

Al Arco.

I ….. ¿Con qué está relacionada la longitud de la circunferencia?

Al ¿Con el radio?

I …… ¿Cómo se llama ese elemento? [Se refiere a la hipotenusa del triángulo rectángulo trazado en el círculo; véase la Figura 2b)].

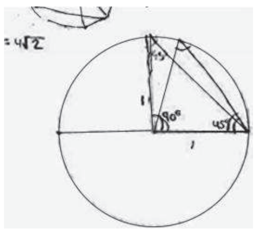

Figura 2b). Caso Al.

Al Cateto.

I Sí, pero en la circunferencia y en el círculo tiene un nombre especial éste. ¿Cómo se llama?

Al Sssecante.

I ¿Cómo?

Al ¿Secante?

I No te acuerdas. Ésta es una cuerda, ¿verdad?

Al Cuerda.

I Una cuerda, ¿no? Y este triángulo que se forma aquí, ¿cómo es? ¿Qué tipo de triángulo es ése?

Al ¿Isósceles?

*Medición*. Lo requirió de la intervención del investigador (véanse las Figuras 3b) y 3c)) para advertir la propiedad de la adición de las longitudes de las partes de una curva (véanse las Figuras 3a) y 3d)) para determinar su longitud total.

I ¿Cómo le harías para medirla?

Lo ¿Por… rangos?

I ¿Cómo la tomas por rangos?

Lo Tomar la cresta: traza marcas que limitan a la primera cresta.

I En general, ¿qué es más fácil medir?

Lo Las cosas que están rectas.

I ¿Qué harías, entonces, para medirla? Si dices que lo más fácil son las rectas, las cosas rectas ...

Lo Por medio del punto, de aquí acá: traza un segmento que une los extremos.

I Pero eso no me lo mide… La voy a partir. ¿Te sería fácil medirlo?

Lo [Asiente].

I Pero, te falta, ¿no?

Lo Sí [remarca la cresta].

I ¿Qué harías, entonces, ahí?

Lo ¡Ah! Podríamos utilizar una cuerda .… Con la regla.

I … imagínate que éste es un río y el río está larguísimo.

Lo … trazos pequeños: hace cinco marcas más para tener seis partes “iguales” [véase la Figura 3d)].

… los trazos… pequeños… podemos medir de aquí a acá [señala los extremos de la primera cresta].

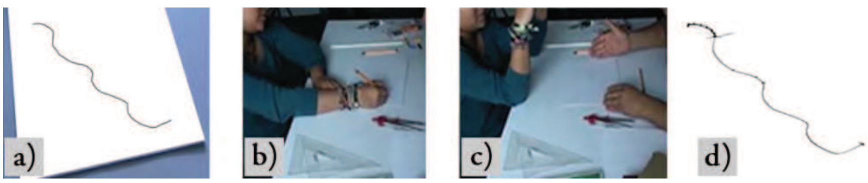


Figura 3. Ejemplos de reactivos y de respuestas al Cuestionario I del caso Lo en entrevista.

*Relaciones trigonométricas*. Aunque **Al** reconoció lo que es un triángulo rectángulo y un triángulo isósceles, y pudo hacer referencia al teorema de Pitágoras para relacionar los lados de triángulos rectángulos, todos estos conocimientos fueron inestables ante la vaguedad de su idea de número irracional, en particular de $\sqrt{2}$, que podría ser debida a que $\sqrt{1^2+1^2}$ se ancle a la identidad $1^2 = 1$ (véase la Figura 4).

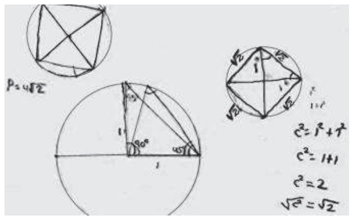

Figura 4. Caso Al.

I Y aquí trazo esa cuerda, ya me dijiste que éste vale cuarenta y cinco y éste vale cuarenta y cinco porque tus lados son iguales [véase la Figura 4].

I …Pero estás de acuerdo conmigo: este radio y este radio son …

Al Iguales.

I Eso no ha cambiado.

Al: No, ajá.

I: Yo le estoy poniendo, para asentir algo, que éste vale uno y éste vale uno [señala a cada cateto en la figura; véase la Figura 4].

Al: Uno. Precisamente éste vale uno [señala a la hipotenusa].

### Cuestionario E

De la enseñanza, del dato cuantitativo resultó lo siguiente: el 9% de los estudiantes dieron entre 17 y 14 respuestas formales, el 30% entre 8 y13, el 61% de 1 a 8. Los datos cualitativos son: 1) Los estudiantes no dan justificación alguna de los ángulos formados por dos paralelas cortadas por una secante transversal; 2) No aplican la semejanza de triángulos no obstante haber sido tema del curso anterior *Razones y proporciones*; 3) No argumentan acerca del teorema de Pitágoras, pues lo aplican mecánicamente y les es difícil trazar los distintos ángulos en el círculo trigonométrico.

### Entrevistas E

Los estudiantes entrevistados (casos Vi y Al) sólo reconocieron resultados numéricos con expresión decimal, mostraron confusión al expresar los lados de un triángulo dado como razón, pero mejoraron sus procedimientos en la solución de problemas típicos. Por ejemplo, Vi respondió, a la vez que D le leía las instrucciones, en cuatro tiempos [T] (véase la Figura 5), como se muestra con la transcripción siguiente:

D T1 *Problema.* Una casa de dos plantas tiene una altura de seis punto veinte metros.

T2 … y proyecta una sombra de cuatro metros con sesenta centímetros.

T3 En el preciso instante que una antena, colocada en la azotea, proyecta una sombra de dos metros con ochenta centímetros.

T4 La pregunta es: "*Calcular la altura de esa antena*". ¿Cómo le harías?

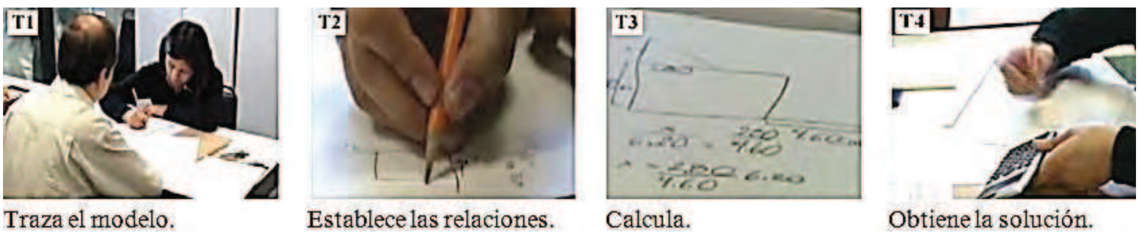


Figura 5. Secuencia del proceso de solución en la entrevista E al caso Vi.

Sin recurrir a la relación de semejanza de triángulos, **Vi** utilizó la regla de tres simple (T2), identificó la incógnita (T3) y con la calculadora encontró su valor (T4); sin embargo, **Vi** no pudo argumentar a favor de su uso de la regla de tres en su procedimiento.

## Conclusiones y comentarios finales

De manera generalizada, el pensamiento geométrico de los estudiantes participantes en la investigación se manifestó en el Nivel 0 del modelo de Van Hiele, en lugar de en una esperada transición del Nivel 1 al 2 dado que se trata de bachillerato. No exhibieron un dominio de la red de conceptos y propiedades implicados en el círculo trigonométrico, por lo que la estrategia recomendada en el programa para la enseñanza de las funciones trigonométricas no era viable. Antecede a la unidad de aprendizaje de las funciones trigonométricas la que incluye al tema del círculo unitario, cuyo objetivo no se logró.

Por otro lado, la investigación e indagación sobre los conocimientos elementales de geometría necesarios para recibir la enseñanza de las funciones trigonométricas reveló, además, deficiencias en el concepto de número, en particular del irracional, manifiestas en los procedimientos que implicaron a raíz de dos y $\pi$ durante las entrevistas, limitados éstos a una expresión decimal. Igualmente, se identificaron deficiencias en las operaciones aritméticas básicas supuestamente resueltas en el nivel educativo anterior.

Los resultados sugieren un examen acucioso del programa de estudios y el impulso a la indagación e investigación.

## Referencias bibliográficas

Dirección de Educación Media Superior, Secretaría Académica, Instituto Politécnico Nacional (2008). Geometría y Trigonometría. *Plan de Estudios*. México: IPN.

Fouz, F. & De Donosti, B. (sf). *Modelo de van Hiele para la didáctica de la Geometría. Un paseo por la Geometría*. Recuperado el 11 de marzo del 2011 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf.

Fuys, D. & Geddes, D. (1984). *An Investigation on van Hiele's Levels of Thinking in Geometry Among Sixth and Ninth Graders: Research Findings and Implications*. Brooklyn, New York: Brooklyn Coll. School of Education.

Van Hiele, P. M. (1957). *De Problematick van het Inzicht Gedemonstreed van het Inzicht von Schodkindren in Meetkundeleerstof*. Ph.D. dissertation. University of Utrecht.