

UN ESTUDIO DE INVESTIGACIONES COGNITIVAS ACERCA DEL CONCEPTO DE LÍMITE. EL CASO DE HABLA HISPANA

Catalina Navarro Sandoval, Erika Suguey Maldonado Mejía, Erika López López
 Universidad Autónoma de Guerrero
 nasacamx@yahoo.com.mx

México

Resumen. En este trabajo se reportan resultados de investigaciones sobre el concepto de límite, particularmente aquellas centradas en el aspecto cognitivo, y estos, tanto en el nivel medio superior como en el nivel superior. Estas investigaciones las clasificamos en tres grupos: las que tratan el preconcepto de límite, sobre las concepciones que se tienen del concepto de límite y las que reportan dificultades al tratamiento del concepto de límite. Algunos de los resultados de estas investigaciones es que el preconcepto está asociado a “una barrera no rebasable”; en cuanto a las concepciones sobre el concepto están las que se relacionan con “valor inalcanzable”, “como aproximación”, entre otras; y algunas dificultades como al redactar la definición del límite.

Palabras clave: límite, perspectiva cognitiva, preconceptos, concepciones

Abstract. In this work we report the results of research on the concept of limit, particularly those focusing on the cognitive aspect, from high school and higher levels of education. We have classified these investigations into the following three groups: those who try the preconception of limit, the conceptions of the concept of limits and those reporting difficulties in treatment of the concept of limit. Some of the results of this research are that the preconception is associated with “a barrier that cannot be passed”; within the conceptions there are those associated with “unattainable value”, “for example approximation”, among others, and some difficulties in drafting the definition of limit.

Key words: limit, cognitive perspective, beliefs, preconceptions

Introducción

Existen diversas investigaciones alrededor del concepto de límite, que se pueden diferenciar por marcos teóricos, niveles educativos y por diferentes perspectivas como la epistemológica, la didáctica, la cognitiva, la histórica, etc. Aunque hasta ahora, no se ha logrado incidir de manera benéfica en la enseñanza aprendizaje de este concepto. De este modo, nos interesamos en identificar y reportar resultados de investigaciones de habla hispana desde una perspectiva cognitiva, pues estas investigaciones buscan explicar la naturaleza de las dificultades de los que aprenden. Este tipo de investigaciones nos permiten entender en parte las causas, aportando entonces en la construcción y exploración de posibles tratamientos didácticos para remediar las mismas, pues se sabe que para los estudiantes el concepto de límite les resulta árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que lo olvidan fácilmente y es uno de los más difíciles de enseñar y aprender (Cantoral, 1993, Blázquez y Ortega, 2001).

Investigaciones sobre el concepto de Límite

La Matemática educativa es una disciplina, que estudia los procesos de transmisión y adquisición del conocimiento, de los diferentes contenidos matemáticos, uno de ellos, es el

Cálculo, mismo que ocupa un lugar predominante en la enseñanza contemporánea. La labor en tal asignatura inicia desde el bachillerato y continúa en la universidad hasta llegar a estudios más profundos y particulares según los intereses de cada individuo (Patiño, 2007). Los cursos de Cálculo diferencial e integral en dichos niveles educativos abordan temas como funciones, límites, derivadas, integrales, entre otros. En particular, el concepto de límite es uno de los más importantes del análisis, ya que es necesario para introducir otros (continuidad, derivada, integral) y, por lo tanto su estudio se hace necesario. Por otro lado, de acuerdo a una revisión de programas de estudio de nivel medio y superior, el concepto de límite aparece por primera vez en el nivel medio superior, también se encontró que en los libros de texto del tercer grado de secundaria, el concepto es usado implícitamente en el análisis de funciones asintóticas de la forma: $f(x) = \frac{1}{x}$ (Block y García, 2006, Marván y Bravo, 2007). En ese sentido en Blázquez y Ortega (2001), Flores, Herrera y González, (2007) y Sierra, González y López (2000) reportan que la mayoría de los estudiantes, desde el nivel medio superior, presentan grandes dificultades, una de ellas es la comprensión del concepto, que van desde la exposición del tema por el profesor hasta las definiciones que aparecen en los libros de texto. También se encontró que el concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos que trae consigo mayor cantidad de dificultades durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, problemas inherentes al propio concepto, y como su estudio es necesario, los investigadores en didáctica de las matemáticas se sienten obligados a emitir algún tratamiento a los problemas que presenta dicho concepto, llevando a cabo investigaciones y proyectos de innovación de la enseñanza (Artigue, 1995).

Cabe señalar que la noción de límite está ligada con otras nociones tales como la variable, función, continuidad, infinito, infinitesimal, número real, continuo numérico y sucesión, y para convertirse en concepto tuvo los siguientes obstáculos: Horror al infinito, separación de lo geométrico y lo numérico, obstáculo geométrico, transferencia de lo finito a lo infinito, principio de continuidad de Leibniz (transferir una propiedad de una sucesión convergente a su límite), obstáculo relativo a funciones, el límite se alcanza o no y obstáculos de la simbología (Sierpinski, 1985, citado en Hernández y Andonegui, 2002).

En el análisis de las investigaciones de corte cognitivo, se organizaron de acuerdo con aspectos que sobresalen de éstas. En primer lugar se tienen las investigaciones sobre preconceptos, en segundo momento sobre concepciones, y, por último sobre dificultades.

Con el *preconcepto* se señala que están ligados a la construcción de estructuras cognitivas débilmente fundamentadas y ajenas al contexto cotidiano del estudiante, y no siendo esta situación deseable, resulta importante reconstruir esos preconceptos hacia “conceptos

fuertes” contruidos, no sobre la formalización del lenguaje matemático sino por el contrario, con base en estrategias didácticas traducidas en acciones individuales de aprendizaje dentro de un “escenario de aprendizaje” prediseñado; lograr que el estudiante observe situaciones contextuales de su vida cotidiana y de ella interiorice en acción, y así abstraer de manera natural las características esenciales y las no esenciales de cada concepto, de tal forma que antes de que se dé el proceso de estudio formal, el alumno construya y aprehenda los conceptos bajo un proceso ajeno a la memorización, pero sí dirigido a su autoconstrucción (Alvarado y García, 2005).

En cuanto al término *concepción*, Páez (2005) define una concepción (en el sentido de Duroux, 1983) como un saber local que se produce cuando se privilegian ciertas situaciones, en menoscabo de otras, en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, una concepción es operante sobre una parte de lo que Vergnaud designa como campo conceptual y por ende presenta necesariamente insuficiencias. Es así que las concepciones de los alumnos designan una estructura mental de carácter general, que incluye creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes (Thompson, 1992, citado en Sierra *et al*, 2000).

Por último, *dificultad* es denominada cómo toda restricción o ausencia (debida a una deficiencia) de la capacidad de realizar una actividad en la forma o dentro del margen que se considera normal para un ser humano. O aquello que impide conseguir o entender una cosa. En cuanto en el aula de clase, una dificultad no solamente está en el proceso enseñanza-aprendizaje de los alumnos, sino también puede notarse en los esfuerzos de los matemáticos de antaño, específicamente los del siglo XIX, para poder definir el concepto de “límite de una función”.

El preconcepto de límite

Alvarado y García (2005) reportan que el preconcepto de límite algunos estudiantes lo asocian básicamente al de una barrera no rebasable, que en efecto corresponde con el concepto matemático de un “límite lateral” cuando se analiza un extremo del dominio de las funciones. En ese sentido los investigadores señalan que la mayoría de los estudiantes que han cursado el bachillerato presentan un preconcepto restrictivo del límite, lo que dificulta el concepto formal. Respecto a la reconstrucción, ellos reportan que las acciones de aprendizajes individuales, pero sobre todo en el análisis de la presentación dada en una acción les permitió crear los preconceptos asociados a contextos naturales, y los preconceptos se lograron a través de la metodología mayéutica y son aceptables para iniciar su estudio dentro del curso formal del Cálculo, si se representan andamiajes adecuados, del mismo modo sugieren que se

debe considerar el efecto de los preconceptos en el aprendizaje del Cálculo al igual que en cualquier área del conocimiento como limitante o acelerador de los procesos formales de aprendizaje, según se establece en las teorías cognitivas. En particular, indican que se emplee como rescate de los preconceptos las vivencias contextuales de los estudiantes y reconstruir con mayor cuidado el preconcepto de límite.

Concepciones del concepto de límite

En cuanto a las concepciones que tienen los estudiantes respecto del concepto de límite son diversas, por ejemplo Sierra, et al, (2000), aquellas que asocian al concepto con la *utilización de límites laterales*, otra es *aproximación* y con *el valor de la función en el punto*. La definición formal fue usada ocasionalmente.

Dificultades del concepto de límite

Diversos autores, expresan que las dificultades que presentan los estudiantes respecto a la comprensión del concepto del límite son difíciles de corregir (Sierpinska, 1985; Cornu, 1991; Williams, 1991; Tall, 1992 y Sierra et al., 2000, citados en Hernández y Andonegui, 2002), la razón de este problema radica en dos factores:

- ❖ Por la complejidad propia del concepto.
- ❖ Las creencias o concepciones que los estudiantes adquieran personalmente.

De acuerdo con lo anterior, se ha encontrado que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas respecto al concepto de límite, no utilizan la definición formal del mismo, sino ciertos esquemas o concepciones que se han construido mentalmente, a partir de los ejemplos que ha puesto el profesor, interrelaciones con los compañeros, apuntes, enseñanzas anteriores, utilización de libros de textos, etc. Por tal razón, los estudiantes tienen una multitud de concepciones las cuales se evidencian cuando se enfrentan a ciertos ejercicios, ellos utilizan la concepción que creen conveniente. Y se ha verificado que algunas de las concepciones están relacionadas con las que han aparecido a lo largo de la historia de las matemáticas, por lo que proponen los investigadores que en los cursos de formación de los profesores se debe incluir la historia de la matemática desde la perspectiva de su enseñanza.

Conclusiones

Dado que nos interesamos en identificar y reportar resultados importantes de investigaciones desde una perspectiva cognitiva, a continuación destacamos los resultados relevantes.

Respecto del *preconcepto de límite* que presentan los estudiantes de nuevo ingreso en el nivel superior se encontró:

PCI- El preconcepto de límite está asociado básicamente al de “una barrera no rebasable”.

Este resultado los investigadores lo relacionan con el concepto matemático de un “límite lateral” cuando se analiza un extremo del dominio de las funciones. Es cierto que los estudiantes tienen un preconcepto de límite como una barrera no rebasable, pero eso no siempre implica que tenga relación con el concepto matemático de un “límite lateral”, ya que cuando se habla sobre éste, se hace referencia acerca de ciertos intervalos ya sea por la izquierda o por la derecha. Pues este puede ser un resultado que surge de sus experiencias personales, ya que se menciona que los estudiantes no habían tomado cursos de cálculo.

Respecto de las *concepciones de límite* que tienen los estudiantes del nivel medio superior, superior y posgrado se identificaron los siguientes:

CPI- La concepción de límite como un valor “inalcanzable”.

CP2- La concepción de límite como “aproximación”.

CP3- La concepción de límite como el valor que toma la función en un punto (ó como una sustitución).

CP4- La concepción de usar la definición de límites laterales para determinar límite de alguna función.

CP5- La concepción de que para cada ε basta tomar el δ igual a ε . (Esta estrategia es correcta para el caso de algunas funciones).

CP6.- La concepción como un proceso dinámico.

Los resultados CPI, CP2 y CP6, se deben a la forma de cómo están presentadas las definiciones del concepto de límite en los libros de cálculo. Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, y se dice “el límite de $f(x)$ es igual a L cuando x tiende a a ” si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como queramos) aproximando x a a pero sin igualar a a . Es decir, con la palabra “tiende” el estudiante piensa que el límite nunca se alcanza o se aproxima, aún después de haber trabajado el concepto.

Con CP3 y CP4, suponemos que la forma en cómo se presentan y desarrollan los ejemplos en los libros de cálculo influyen en estas concepciones. Aunque CP3 falla cuando los estudiantes se enfrentan a funciones racionales de la forma $f(x) = g(x)/h(x)$ en donde existe un valor para x que hace que $g(x)$ y $h(x)$ sean *cero*.

Esto es, el límite es el valor que se obtiene al sustituir a en la función $f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$).

Por ejemplo:

$$\text{Calcular el } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = 1!$$

$$\text{Calcular el } \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 2 = 1^3 + 2 = 3$$

En cuanto a CP4 algunos estudiantes proceden como sigue:

Calcular el límite de $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, cuando $x \rightarrow 2$

Los valores que toma x se acercan a 2 por la izquierda

Los valores que toma x se acerca 2 por la derecha

X	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.001	2.01	2.1	2.3	2.5
F(x)	9.25	9.76	10.29	10.86	11.41	12	12.006	12.06	12.6	13.8	15

Tabla 1

Por lo tanto el límite de $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, cuando $x \rightarrow 2$, es igual a 12.

Respecto CP5. Suponemos que algunos estudiantes durante el trabajo inicial con el tema de límites, específicamente cuando se abordan las funciones elementales se casa con la idea de que $\delta = \varepsilon$, esto se cumple solo en caso de: $f(x) = x + c$ siendo c una constante y no para otras funciones.

Por último, en cuanto a las *dificultades asociadas al concepto del límite* de los estudiantes del nivel superior, encontramos lo siguiente:

DF1- Dificultad al redactar la definición de límite, es decir, una gran parte de estudiantes se les dificulta la interpretación del simbolismo algebraico vinculado a la función valor absoluto, a las desigualdades, el uso de los cuantificadores, el orden de la implicación y la confusión de los papeles de delta y épsilon.

DF2- Dificultad para reconocer e interpretar límites laterales.

DF3- Dificultad respecto a la interpretación de entornos reducidos

DF4- Dificultad de la comprensión del concepto de límite aun después de su enseñanza o cuando tratan la definición formal de límite.

Por ejemplo:

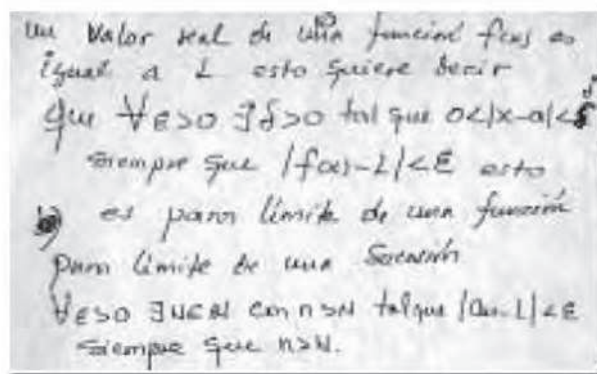


Figura 1

En la figura 1, se observa que el estudiante ha suministrado la definición del límite de una función, cambiando el orden de la implicación, esto es, afirmó que $|f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \delta$. Es decir, muchos estudiantes invierten el orden de la implicación, los investigadores reportan que esto se debe a una mala memorización de la definición, pero también, es posible que dicha definición corresponda a la dada por algunos libros de cálculo en la que se establece que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Por otro lado, se muestra que algunos estudiantes memorizan las definiciones de los conceptos y al querer recordarlas, recuperan sólo algunas partes de éstas, esto puede ser ya que algunos docentes, no muestran y/o destacan las características esenciales de concepto. Así mismo, creemos que es importante atender más a la comprensión del concepto que al desarrollo de algoritmos.

Referencias bibliográficas

- Alvarado, M. y García, C. (2005). Preconceptos en el aprendizaje del cálculo. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 11-17. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Bogotá. Grupo editorial Iberoamérica.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación a la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(3), 219-236.
- Block, D. y García, S. (2006). *Matemáticas 3*. México: Serie Construir.

- Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones centroamericana* 7, 391-410.
- Flores, S., Herrera, A. y González, M. (2007). *Problema de aprendizaje del concepto de límite en el contexto de la cinemática*. Recuperado el 16 de marzo del 2010, en <http://www.dialnet@unirioja.es>.
- Hernández, J. y Andonegui, M. (2002). Matemática Educativa: Concepciones acerca de la noción de límite. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16, 125-131. México: Clame.
- Marván, L. y Bravo, C. (2007). *Matemáticas 3*. México: Castillo.
- Páez, R. (2005). *Reconstrucción del concepto de límite: Estudio de un Caso*. universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia. Recuperado el 08 de Octubre 2007, de <http://www.rpaez@mail.cinvestav.com.mx>.
- Patiño, D. (2007). *Estudio de comportamientos análogos de funciones algebraicas y trigonométricas usando transformaciones gráficas*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Sierra, M. González, T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(1), 71-85.