PONTOS DE VISTA E A MANIPULAÇÃO DE OSTENSIVOS E EVOCAÇÃO DE NÃO OSTENSIVOS EM ÁLGEBRA LINEAR

Tânia Maria Mendonça Campos, Marlene Alves Dias, Elizabeth Fracarolli Jammal
UNIBAN Brasil
taniammcampos@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br, bethjammal@gmail.com

Resumen. En este trabajo presentamos una parte del estudio sobre la transición Educación Media y Superior relacionado al desarrollo de la disciplina Álgebra Lineal en los Cursos de la Licenciatura en Matemáticas cuando se consideran los conocimientos previos disponibles de los estudiantes que inician esa etapa escolar. De esa forma, alcanzar el objetivo que es mostrar la importancia de considerar diferentes puntos de vista, según la definición de Rogalski (2001), para el desarrollo del Álgebra Lineal, observando la correspondencia de estos con los cambios de marcos según Douady (1992) y las praxeologías variadas que dependen de los ostensivos y no ostensivos en juego en las tareas, conforme a las definiciones de praxeología y ostensivos y no ostensivos presentadas en Bosch y Chevallard (1999), que posibilitan la articulación de los nuevos conocimientos con los conocimientos previos disponibles.

Palabras clave: marcos, ostensivos y no ostensivos, organizaciones praxeológicas, puntos de vista

Abstract. In this paper we present a part of the study on the transition from high school and college related to the development of the discipline of Linear Algebra in master degree courses in mathematics when considering the available previous knowledge of students who start school this step. This way, to achieve the goal which is to show the importance of considering different points of view, as the definition of Rogalski (2001), for the development of Linear Algebra, noting such correspondence with frame changes as defined by Douady (1992) and varied praxeology, wich depend of ostensive and non-ostensive presented in tasks, as definitions of praxeology and ostensive e non-ostensive presented in Bosch e Chevallard (1999), that enable the articulation of new knowledge with the previous knowledge available

Key words: frames, ostensives and non-ostensives, praxeological organizations, points of view

Introdução

O objetivo desse trabalho é mostrar que considerar diferentes pontos de vista pode corresponder a uma mudança de quadros que permite desenvolver organizações praxeológicas que diferem em relação às técnicas associadas a um mesmo tipo de tarefa, consequentemente às tecnologias e teorias que as sustentam, possibilitando assim desenvolver um novo conhecimento considerando os conhecimentos prévios dos estudantes.

Em função desse objetivo utilizamos como referencial teórico para essa pesquisa a noção de pontos de vista introduzida em Rogalski (2001), em particular, os pontos de vista associados à noção de posto, isto é, os pontos de vista família de vetores, aplicação linear, matriz e sistema linear que são desenvolvidos em função da escolha do quadro em que se aplicam.

Isso conduziu a introduzir a noção de quadro conforme definição de Douady (1992), isto é, um quadro corresponde a um ramo da Matemática constituído de objetos, suas relações, formulações eventualmente diversas que permitem desenvolver imagens mentais associadas a esses objetos, relações e formulações e cujo papel essencial é servir de ferramenta para o funcionamento do quadro.

É essa noção que possibilitou a distinção dos quadros da geometria afim euclidiana, dos sistemas de equações lineares, das matrizes, dos determinantes e da álgebra linear e a noção de organização praxeológica que é composta de um bloco prático que corresponde aos tipos de tarefas e técnicas associadas ao desenvolvimento de um determinado domínio ou noção em matemática e um bloco teórico que corresponde às tecnologias, ou discurso sobre as técnicas, e teorias, ou discurso sobre as tecnologias, que descrevem, explicam e justificam as técnicas e tecnologias empregadas.

Além disso, recorremos às noções de ostensivos e não ostensivos, conforme definição de Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1994), que são os elementos essenciais para o desenvolvimento das técnicas, pois os ostensivos são utilizados na manipulação das noções, conceitos e ideias empregadas nas técnicas enquanto essas últimas constituem os não ostensivos evocados durante a realização da atividade matemática.

A metodologia usada para a pesquisa foi o da pesquisa documental com a identificação das propostas institucionais via planos de ensino da disciplina Álgebra Linear para os Cursos de Licenciatura em Matemática de universidades públicas e privadas, em que identificamos por meio da bibliografia básica e complementar as obras mais indicadas para essa disciplina. Na sequência identificamos nessas obras as praxeologias privilegiadas e os quadros e pontos de vista utilizados por meio de uma grade de análise construída para esse fim.

Observamos que nas obras mais antigas as praxeologias estão centradas no desenvolvimento do quadro da Álgebra Linear privilegiando os pontos de vista família de vetores e aplicação linear e nas obras atuais, que começam a ser utilizadas com maior frequência, existe uma preocupação com a articulação dos quadros da geometria afim euclidiana, das matrizes, dos determinantes e dos sistemas lineares fazendo intervir também os pontos de vista matrizes e sistemas lineares, o que em relação ao trabalho realizado no Ensino Médio brasileiro possibilita uma introdução das noções de combinação linear, dependência e independência linear, base e dimensão e aplicação linear para os espaços vetoriais de IR^n por meio da articulação dos quadros da geometria, dos sistemas lineares e das matrizes antes de considerar a axiomática que permite definir os espaços vetoriais de dimensão finita e infinita e demonstrar suas propriedades.

Apesar de já anunciado o referencial teórico a metodologia e alguns resultados da pesquisa, iniciamos pelo referencial teórico dando mais detalhes sobre o trabalho realizado e os resultados encontrados.

Referencial teórico

Observamos que o referencial teórico central da pesquisa é a noção de pontos de vista que segundo Rogalski (2001) é uma ferramenta potente para o ensino e aprendizagem, em particular para a Álgebra Linear, pois ela permite olhar um objeto ou uma situação matemática de diferentes maneiras e deste modo por aproximação das conclusões retiradas podemos obter novos resultados. Assim, para Rogalski (2001) uma mudança de quadros para estudar um objeto matemático já corresponde a uma mudança de ponto de vista, mas também é possível mudar de ponto de vista dentro de um mesmo quadro. Um exemplo, corresponde à noção de posto em Álgebra Linear para a qual Rogalski (2001) identificou os quatro pontos de vista a seguir que definimos e apresentamos um exemplo.

Posto de uma família de vetores: O posto de uma família de vetores é a dimensão do subespaço vetorial gerado por essa família, isto é, o número máximo de vetores linearmente independentes que se pode extrair da família. Exemplo: Dada a família de vetores {(1, 3, 1); (3, 8, 2) e (2, 9, 5)} de IR^3. Determina-se o posto de uma família de vetores aplicando o método de Gauss sobre a coluna da tabela de números que correspondem a dispor esses mesmos vetores em colunas. Para interpretar os resultados indicam-se os vetores e as operações realizadas sobre os mesmos.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}} \end{array} \approx \begin{array}{ccc} a & b\text{-}3a & c\text{-}2a \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} \end{array} \approx \begin{array}{ccc} a & b\text{-}3a & (c\text{-}2a)+3(b\text{-}3a) \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} \end{array}$$

Após a aplicação do método de Gauss verifica-se que o vetor $c = 11a - 3b$ é combinação dos vetores a e b e que a e b são linearmente independentes. Logo, o posto da família de vetores dados é igual a 2.

Posto de uma aplicação linear: Dados dois espaços vetoriais de dimensão finita E, F e uma aplicação linear f de E em F, o posto da aplicação linear f é a dimensão da imagem de f. Exemplo: Seja f: IR^2 □ IR^3 definida por $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x + y)$. Logo $Im(f) = \{(x + y, x - y, 2x + y) \in IR^3\}$. Efetuando a passagem do ostensivo a representação paramétrica "implícita-tabela" para o ostensivo de representação paramétrica "explícita-tabela" definidos por Dias (1998) e ilustrado pelo exemplo $(x + y, x - y, 2x + y) = x(1, 1, 2) + y(1, -1, 1)$, em que o primeiro e o segundo ternos ordenados são exemplos dos ostensivos de representação paramétrica indicados acima.

O ostensivo de representação paramétrica "explícita-tabela" permite identificar os vetores (1, 1, 2) e (1, -1, 1) como geradores do espaço vetorial Im(f). Como esses vetores não são proporcionais, eles determinam uma base de Im(f). Logo. A dimensão do espaço vetorial Im(f) é igual a 2, portanto, o posto da aplicação linear f: IR^2 □ IR^3 definida por (x, y) $\mapsto$ (x + y, x – y, 2x + y) é igual a 2.

Posto de uma matriz: O posto de uma matriz é o número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes, isto é, o número de linhas (ou colunas) diferentes de zero após o escalonamento da matriz, como se pode observar por meio do exemplo:

Seja A = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 11 & 14 \end{vmatrix}$

Escalonando em relação às colunas da matriz dada, temos duas linhas diferentes de zero. Portanto, o posto da matriz é 2. Observa-se aqui que o posto da matriz A é igual ao posto da transposta de A.

Posto de um sistema linear: O posto de um sistema de equações lineares é o número de equações independentes do sistema de equações lineares e homogêneas associado ao sistema dado, após aplicação do método de Gauss. $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 3y - 2z = b \\ 3x + 4y - z = c \end{cases}$

No exemplo acima, após a aplicação do método de Gauss ao sistema linear e homogêneo associado ao sistema dado, identificam-se duas equações independentes, portanto o posto do sistema é 2.

Considerando os pontos de vista acima apresentados, ressaltamos a observação feita por Rogalski (2001) que a passagem de um ponto de vista para o outro não se realiza por meio de uma simples tradução de um quadro para o outro sendo necessária a utilização de teoremas que garantem as propriedades do invariante que é a noção de posto.

Isso nos conduziu a considerar a noção de quadro e mudança de quadros definidas por Douady (1992). A definição da noção de quadro lhe permite transpor a forma de funcionamento do matemático profissional para a didática por meio das mudanças de quadros, que consistem em obter diferentes formulações para um mesmo problema que possibilitam utilizar ferramentas e técnicas que não se aplicavam na primeira formulação.

Observamos assim que as mudanças de pontos de vista e de quadros estão associadas às técnicas utilizadas para o desenvolvimento das tarefas que são propostas aos estudantes e as representações externas e internas que eles dispõem.

Isso nos conduziu a considerar em nosso referencial teórico as noções de organizações praxeológicas ou praxeologias e de ostensivos e não ostensivos introduzidos por Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1994).

Segundo Bosch e Chevallard (1999) uma organização praxeológica ou praxeologia é composta de: tipos de tarefas, tipos de técnicas, tecnologias ou discurso sobre as técnicas e teorias que são as tecnologias das tecnologias. Assim, nessas organizações o par tipos de tarefas e técnicas corresponde ao bloco prático que indica o saber como fazer e o par tecnologias e teorias corresponde ao bloco teórico que permite descrever, explicar, justificar e controlar as técnicas utilizadas durante a execução das tarefas.

Para a execução das tarefas existem os elementos que permitem manipular as técnicas que Chevallard (1994) denomina ostensivos e correspondem às representações externas, mas ao mesmo tempo é preciso evocar os conceitos, noções e ideias em jogo nas tarefas para explicá-las, justificá-las e controlá-las, ou seja, as representações internas que Chevallard (1994) chama de não ostensivos. Como exemplos de ostensivos temos: objetos materiais como uma caneta, um compasso, etc, os gestos ou ostensivos gestuais, as palavras, e, mais genericamente, o discurso ou ostensivos discursivos, os esquemas, desenhos e grafismos ou ostensivos gráficos e as escritas e formalismos ou ostensivos escriturais.

Como os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto que os não ostensivos são evocados pela manipulação dos ostensivos, Chevallard (1994) observa a existência de uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos indicando que são eles os ingredientes essenciais para o desenvolvimento das técnicas que permitem resolver os diferentes tipos de tarefas.

Utilizamos ainda a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes definidos por Robert (1997), a saber, os níveis técnico, mobilizável e disponível. O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto, em geral, associado às definições e ferramentas a serem utilizadas em determinada tarefa. O nível mobilizável corresponde a resolver uma tarefa por meio da identificação de um saber que é pedido explicitamente. Nesse caso, é preciso saber utilizar ferramentas específicas de forma correta e em alguns momentos o conhecimento a ser mobilizado já corresponde a uma determinada organização. O nível disponível corresponde a responder corretamente à tarefa dada, porém não é indicado nenhum caminho ou ferramenta que possam auxiliar na sua resolução. Nesse nível é preciso dispor de meios para encontrar ou criar contra-exemplos, para articular diferentes noções matemáticas fazendo as relações necessárias entre elas, para efetuar mudanças de quadros utilizando os ostensivos de representação adequados, aplicar métodos não previstos.

Escolhido o referencial teórico que dá suporte às análises consideradas como importantes para atingir o objetivo da pesquisa, isto é, mostrar que considerar diferentes pontos de vista pode corresponder a uma mudança de quadros que permite desenvolver organizações praxeológicas que diferem em relação às técnicas associadas a um mesmo tipo de tarefa, consequentemente às tecnologias e teorias que as sustentam, possibilitando assim desenvolver um novo conhecimento em função dos conhecimentos prévios dos estudantes, organizou a seguinte metodologia para esse estudo.

Metodologia

A metodologia utilizada na pesquisa foi a da pesquisa documental organizada da seguinte forma:

- Análise das propostas institucionais via planos de ensino da disciplina Álgebra Linear para os Cursos de Licenciatura em Matemática de universidades públicas e privadas. A bibliografia contida nessas propostas permitiu considerar as obras mais indicadas para essa disciplina.
- Análise das praxeologias privilegiadas e dos quadros e pontos de vista utilizados por meio de uma grade de análise construída para esse fim para quatro livros didáticos que são os mais indicados nos planos de ensino de universidades públicas e privadas.

Para a análise dos livros didáticos construímos a seguinte grade:

A grade de análise

A grade de análise segue o modelo utilizado por Dias (1998) em sua tese e serve para identificar as praxeologias privilegiadas e permite mostrar como os diferentes pontos de vista são eficazes para aproximar conclusões retiradas de cada um deles para obter novos resultados.

- Quadros em que a tarefa é enunciada;
- Ostensivos utilizados no enunciado;
- Não ostensivos utilizados no enunciado;
- Quadros para solução da tarefa;
- Ostensivos utilizados na solução da tarefa;

- Ponto de vista em jogo;
- Níveis de conhecimentos necessários para a solução da tarefa.

Considerando que em Álgebra Linear a noção de subespaço vetorial pode ser trabalhada por meio de dois pontos de vista: o ponto de vista cartesiano que corresponde a definir um subespaço vetorial por meio de um sistema de equações lineares homogêneas linearmente independentes e o ponto de vista cartesiano que corresponde a definir o subespaço por meio de uma família de vetores linearmente independentes. Observamos que o trabalho sobre esses dois pontos de vista facilita o planejamento, execução, justificativa e controle dos resultados encontrados quando da solução das tarefas usuais de um curso de introdução de Álgebra Linear. Isso permite articulares os diferentes pontos de vista associados à noção de posto enunciados acima, que possibilitam melhor compreender as noções de combinação linear, dependência e independência linear, base e dimensão.

Dessa forma, a grade de análise possibilita identificar como esses pontos de vista são tratados, quando da Introdução à Álgebra Linear, nos Cursos de Licenciatura em Matemática nas universidades brasileiras.

Exemplo de aplicação da grade de análise

O exemplo a seguir permite compreender as escolhas teóricas e metodológicas apresentadas acima.

Determinar o subespaço de IR^3 solução do seguinte sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+4y-5z=0 \end{cases}$

Em geral, o contrato didático relativo a tal tarefa implica que a solução seja dada por meio do ponto de vista paramétrico utilizando o ostensivo de representação "explícita-tabela" apresentado acima. Portanto, é necessária a passagem do ponto de vista cartesiano para o ponto de vista paramétrico.

Aplicando a grade, temos:

- Quadros em que a tarefa é enunciada; algébrico;
- Ostensivos utilizados no enunciado; ostensivo de representação equações;
- Não ostensivos utilizados no enunciado; sistema de equações lineares e subespaço vetorial;
- Quadros para solução da tarefa; algébrico;

- ❖ Ostensivos utilizados na solução da tarefa; ostensivo de representação equações e ostensivo de representação tabela para os vetores dados em coordenadas;
- ❖ Ponto de vista em jogo;cartesiano e paramétrico;
- ❖ Níveis de conhecimentos necessários para a solução da tarefa: disponível, pois o estudante deve reconhecer a questão do contrato didático e dar o conjunto solução por meio do ponto de vista paramétrico. O planejamento, execução, justificativa e controle dependem da disponibilidade da articulação ponto de vista cartesiano e paramétrico que está associada à determinação do posto do sistema de equações e do posto da família de vetores que gera o subespaço solução e da relação entre eles.

Na sequência apresentamos alguns resultados encontrados nas análises efetuadas nos quatro livros didáticos que são atualmente os mais indicados nos planos de ensino dos Cursos de Licenciatura em Matemática de algumas universidades brasileiras.

Alguns resultados

Observamos que nas obras de Callioli, Domingues e Costa (1990) e Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler (1980) as praxeologias estão centradas no desenvolvimento do quadro da Álgebra Linear privilegiando os pontos de vista família de vetores e aplicação linear, mas não se faz explicitamente a articulação entre eles.

Nas obras de Anton e Rorres (2008) e Kolman e Hill (2006) existe uma preocupação com a articulação dos quadros da geometria afim euclidiana, das matrizes, dos determinantes e dos sistemas lineares fazendo intervir também os pontos de vista matrizes e sistemas lineares, mas também não se faz uma articulação explícita entre eles.

Se apreciamos o trabalho realizado no Ensino Médio brasileiro podemos considerar que o mesmo possibilita uma introdução das noções de combinação linear, dependência e independência linear, base e dimensão e aplicação linear para os espaços vetoriais de IR^n por meio da articulação dos quadros da geometria, dos sistemas lineares e das matrizes antes de considerar a axiomática que permite definir os espaços vetoriais de dimensão finita e infinita e demonstrar suas propriedades.

Considerações finais

Observamos que o estudo dos espaços vetoriais de R^n permite explicitar a passagem cartesiano/paramétrico e paramétrico/cartesiano, lembrando que para determinadas tarefas um ou outro ponto de vista mostra-se mais adequado, muitas vezes por facilitar o trabalho a ser realizado. Observa-se ainda que para tarefas em que se deseja determinar a inclusão ou interseção de subespaços, dependendo do ponto de vista utilizado a passagem é indicada por facilitar a solução da tarefa, mas para isso é preciso tratar a articulação desses dois pontos de vista por meio dos teoremas que justificam essa passagem. Esses pontos de vista dependem também da introdução de diferentes ostensivos e não ostensivos como mostra o exemplo de aplicação da grade de análise.

Referências Bibliográficas

Anton, H. & Rorres, C. (2008). *Álgebra Linear com aplicações*. Porto Alegre: Bookman.

Boldrini, J.L., Costa, S.R., Figueiredo,V.L. & Wetzler, H.G. (1980). *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper e Row do Brasil.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Grenoble: *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-123.

Callioli, C.A., Domingues, H.H. & Costa, R.C. (1990). *Álgebra Linear* e *Aplicações*. São Paulo: Atual Editora.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs e non-ostensifs dans l'activité mathématique. En *Actes du VI Séminaire de l'Associazione Mathesi 6,* 190-200. Itália: Séminaire de l'Associazione Mathesis.

Dias, M.A. (1998). Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Paris: IREM Paris 7.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Kolman, B. & Hill,D.H. (2006). *Introdução à Álgebra Linear com aplicações*. São Paulo: Editora LTC.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate* 9, 193-212. França: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadres dans la pratique des mathématiques et les jeu des cadres de Régine Douady. En *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 13-31. França: IREM Paris7.