LAGRANGE Y LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NUMÉRICAS: PERSPECTIVA HISTÓRICA EPISTEMOLÓGICA

Flor M. Rodríguez-Vásquez, Modesto Sierra
Universidad Autónoma de Guerrero México
Universidad de Salamanca España
flor_r@usal.es, mosiva@usal.es

Resumen. Presentamos parte de una investigación de corte histórica epistemológica cuyo objetivo fue el de vislumbrar la evolución histórica del concepto ecuación a partir de un análisis de libros tanto históricos como de texto. Específicamente expondremos lo obtenido del análisis de la obra Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques, escrita por J. L. Lagrange.

Palabras clave: análisis histórico epistemológico, ecuaciones

Abstract. In this paper, we show a part about a historical epistemological research in which the aim was to portray the historical evolution of the equation concept from an analysis of both historical and text books. Below we discuss what obtained from the analysis of Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques oeuvre that was writing by J. L. Lagrange.

Key words: historical epistemological analysis, equations

Introducción

En Didáctica de la Matemática, la investigación histórica-epistemológica tiene entre algunos de sus fines, el mostrar la evolución de los conceptos, de su vinculación con otros que le son consustanciales, de sus distintas formas de representación y tratamiento y principalmente el de mostrar el saber erudito en su forma natural.

Los estudios históricos epistemológicos son de suma importancia en la educación, en parte debido a lo que Sierra, González y López (1999) consideran, y es que algunos de los fundamentos de la enseñanza de la matemática se basan en la génesis misma de los conocimientos; y en parte debido a la problemática del abuso de la transposición del conocimiento lo que en consecuencia sugiere que se deben considerar formas adecuadas para la introducción del conocimiento matemático escolar tanto teóricamente como metodológicamente hablando. Además Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2008) nos hacen reflexionar acerca de que la matemática se construyó socialmente en ámbitos no escolares y por lo tanto se deben hacer consideraciones pertinentes para su incorporación al sistema de enseñanza.

Hoy día la literatura muestra que el impacto de la historia de la matemática no sólo a nivel descriptivo o cronológico, sino también práctico, es decir, en varios países como por ejemplo

Francia, Grecia, e Inglaterra, se propone que la enseñanza de la matemática debe incluir la formación histórica de los conceptos desde su institucionalización curricular (CERME 2009), lo cual desde nuestra opinión enriquece metodológicamente en la práctica docente pues además de la formación basada en operaciones y abstracciones, la parte epistémica del conocimiento se incluye en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Marco teórico - metodológico

Acudimos a la investigación histórica-epistemológica con base en el método histórico de Ruiz Berrio (1976) en donde se plantea que se deben seguir fundamentalmente cuatro fases:

- ❖ Heurística: localización y clasificación de los documentos.
- ❖ Crítica histórica: crítica externa; crítica interna.
- ❖ Hermenéutica: interpretación histórico-pedagógica de los hechos.
- ❖ Exposición: explicaciones convenientes del trabajo histórico.

De aquí que se propuso la metodología de análisis de libros históricos siguiente:

<table>
<tr><th>Campo de análisis</th><th colspan="2">Unidades de análisis</th><th>Categori-zación</th><th>Descripción general de los propósitos</th></tr>
<tr><td>Ficha de referencia de la obra</td><td colspan="2">Nombre del autor
Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor
Primera edición
Edición analizada
Localización del manual utilizado</td><td>CP1</td><td>Nos permite enmarcar la obra en el momento en que fue escrita.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Contextos y propósitos de la obra y del autor</td><td colspan="2">Momento histórico y lugar en que fue escrita la obra</td><td>CP1</td><td rowspan="7">Contextualización y caracterización de la obra en función de los sucesos que influyeron para su divulgación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contexto histórico-cultural de las matemáticas en general</td><td>CP2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formación del autor</td><td>CP3</td></tr>
<tr><td>Estructura general del material</td><td>Extensión y estructura del material
Secuenciación de los contenidos de la obra
Tipografía de la obra</td><td>CP4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos generales de la obra</td><td>CP5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Innovaciones introducidas por el material</td><td>CP6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otras obras publicadas</td><td>CP7</td></tr>
<tr><td>Tipo de proceso utilizado en la resolución de</td><td>Geométrico (G)</td><td>Ejemplos y problemas
Tipos de expresiones utilizadas</td><td>PG</td><td>Explicación del tratamiento didáctico con base en periodos</td></tr>
</table>

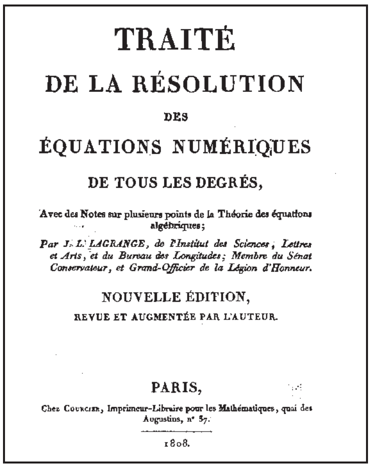
ecuaciones		Conceptos involucrados Gráficas empleadas		históricos representativos.
	Algebraico (A)	Ejemplos y problemas Tipos de expresiones utilizadas Conceptos involucrados	PA	
	Numérico	Ejemplos y problemas Tipos de expresiones utilizadas Conceptos involucrados	PN	

Tabla 1. Categorías para el análisis de libros históricos. Rodríguez-Vásquez (2010).

Ecuaciones numéricas en la obra de Lagrange

El análisis de la obra *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques* (1808), escrita originalmente por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en 1798, fue considerada en la investigación debido a que es una de las obras escritas en un periodo crítico en cuanto a la cuestión social del desarrollo de la matemática misma, influencia del periodo de la ilustración y la revolución francesa.

El *Traite* está formado por seis capítulos, cada uno dividido por secciones y catorce notas sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. El contenido versa sobre el método para encontrar en una ecuación numérica cualquier el valor entero más aproximado a cada una de sus raíces reales; sobre la manera de tener las raíces iguales y las raíces imaginarias de ecuaciones; el nuevo método para aproximar raíces de ecuaciones numéricas (refiriéndose al planteado por él en la obra); sobre la aplicación de los métodos precedentes a ejemplos cualquiera; y sobre las raíces imaginarias.


TRAITÉ

DE LA RÉSOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

DE TOUS LES DEGRÉS,

Avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques;

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat Conservateur, et Grand-Officier de la Légion d'Honneur.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1808.

Figura 1. Portada del Traité

En la introducción, se menciona que la solución de todo problema determinado se reduce, a la resolución de una o de varias ecuaciones, cuyos coeficientes son números dados, refiriéndose específicamente a las llamadas ecuaciones numéricas. De aquí la importancia de obtener métodos para resolver completamente estas ecuaciones y la relevancia de la obra dado que en ella misma se expresa que contiene un método para lo anterior y se anexan los principales puntos sobre la teoría de ecuaciones algebraicas.

Se observó de la obra que Lagrange hace la diferencia de la resolución de ecuaciones numéricas de la que llama en álgebra resolución general de ecuaciones (y que en la actualidad seguimos llamándole así), la primera es propiamente dicha, una operación aritmética fundamentada en los principios generados por la teoría de ecuaciones. La extracción de raíces cuadradas y cúbicas son la operación más simple de este género y asimismo la resolución de ecuaciones numéricas de segundo y tercer grado. En consecuencia, señala que se deja a la Aritmética las reglas de la resolución de ecuaciones numéricas y al Álgebra su demostración, ya que dependen de la teoría general de ecuaciones. Sostiene que el sentido del álgebra es más amplio, establece que el arte de determinar los factores desconocidos para las funciones de cantidades conocidas; la resolución general de ecuaciones consiste en encontrar, para todas las ecuaciones de un mismo grado, las funciones de los coeficientes de estas ecuaciones quienes pueden representar todas sus raíces. Menciona, además, la dificultad que existe en los casos de ecuaciones irreducibles. Posteriormente señala que afortunadamente, se han encontrado los medios para superarlo en los grados tercero y cuarto, por la consideración de la trisección de ángulos y por la ayuda de tablas trigonométricas, aunque esto depende de que la división de ángulos no es aplicable en los grados más elevados sino sólo a una clase muy limitada de ecuaciones. En consecuencia recurre a un método aritmético, el cual, es precisamente objeto del *Traité*.

Da crédito a Viète (1540-1603) como el primero en ocuparse de la resolución de ecuaciones numéricas de cualquier grado, y que Harriot (1550-1621), Oughtred (1574-1660) y Pell (1611-1685), entre otros, que investigaron para facilitar el uso del método presentado por Viète, proporciona reglas particulares para disminuir los ensayos, según los diferentes casos que tienen lugar en las ecuaciones respecto de sus signos y de sus términos, mas la multitud de operaciones que se generan llevan a la incertidumbre del éxito en un gran número de los casos. El método, al cual se refiere es, al de Newton (1643-1727), y se describe enseguida:

> A la méthode de Viète a succédé celle de Newton, qui n'est proprement qu'une méthode d'approximation, puisqu'elle suppose que l'on ait déjà la valeur de la racine qu'on cherche, à une quantitè près moindre que sa dixième partie: alors on substitue cette valeur plus une nouvelle inconnue à l'inconnue de l'équation proposée, et l'on a une seconde équation dont la racine est ce qui reste à ajouter à la première valeur pour avoir la valeur exacte de la racine cherchée: mais, à cause de la petitesse supposée de ce reste, on néglige dans la nouvelle équation le carré et les puissances plus hautes de l'inconnue; et l'équation étant ainsi rabaissée au premier degré, on a sur-le champ la valeur de l'inconnue. Cette valeur ne sera encore qu'approchée; mais on pourra s'en servir pour en trouver une autre plus exacte, en faisant sur la seconde équation la même opération que sur la première,

> et ainsi de suite. De cette manière, on trouve à chaque opération une nouvelle quantité à ajouter ou à retrancher de la valeur déjà trouvée, et l'on a la racine d'autant plus exacte qu'on pousse le calcul plus loin. (Lagrange, 1826, IX)

Sin embargo, señala que, aunque dicho método es el más comúnmente usado para la resolución de ecuaciones numéricas, sólo se aplica a un cierto número de ellas puesto que no es del todo seguro.

En consecuencia, Lagrange parte fundamentalmente de un problema que expresa textualmente como sigue:

> Le problème qu'on doit se proposer dans cette partie de l'Analyse est celui-ci: Étant donnée une équation numérique sans aucune notion préalable de la grandeur ni de l'espèce de ses racines, trouver la valeur numérique exacte, s'il est possible, ou aussi approchée qu'on voudra de chacune de ses racines. Ce problème n'avait pas encore été résolu; il fait l'objet des recherches suivantes. (Lagrange, 1826, X)

Es decir, pretendía resolver el problema de encontrar el valor numérico exacto o tan aproximado como se desee, de cada una de las raíces de cualquier ecuación numérica sin noción preliminar de su tamaño ni de su tipo de raíces.

Lo que propuso fue un análisis de la ecuación a resolver en función de las características de sus coeficientes, sus signos y cambios de signo, al sustituir valores consecutivos de la variable x definir así su solución. En general, para resolver una ecuación de la forma:

$$Ax^{m} + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + K = 0 \qquad (a)$$

Se propuso encontrar una ecuación auxiliar que nos permita decidir cuántas raíces reales e imaginarias tiene (*a*). Lo cual presume una ventaja sobre el método de aproximación de Newton. La ecuación auxiliar se encuentra sustituyendo valores enteros sucesivos en (*a*) para encontrar una aproximación inicial, el fundamento es el cambio de signo en el valor obtenido de dicha sustitución, es decir se busca x tal que $x > p$ y $x < p + 1$ o sea $x = p + \frac{1}{y}$. De donde, sustituyendo este valor en (*a*), se obtendrá una nueva ecuación (*b*) en términos de y.

Continuando de esta manera, se aproxima cada vez más al valor de la raíz buscada. Y, en el caso de que cualquiera de estos números $p, q, \ldots$ sean una raíz exacta, entonces se tendrá que $x = p$ o $y = q, \ldots,$ y la operación estará terminada; luego, se encontrará para x un valor conmensurable. En los otros casos, el valor de la raíz será necesariamente inconmensurable, y se podrá solamente aproximar muy cerca al valor verdadero.

El resultado, las *fracciones continuas* en la resolución de ecuaciones numéricas. Ver Figura 2.

22. Soient donc $p, q, r, s, t, \ldots$ les valeurs entières approchées des racines des équations (a), (b), (c), ..., en sorte que l'on ait

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{z}, \quad z = r + \frac{1}{u}, \quad \ldots.$$

Substituant successivement ces valeurs dans celle de x, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ldots}}}$$

Figura 2. Fracciones continuas. Lagrange (1808, p.45)

Una característica en el proceder es que método propuesto conserva el carácter iterativo y asegura el encontrar el valor solución de la ecuación numérica.

En resumen, si se quiere resolver por ejemplo la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$,

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que Newton a résolue par sa méthode, savoir,

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Figura 3. Lagrange (1808, p. 51)

Se obtienen las aproximaciones $p, q, \ldots$ y finalmente la solución expresada en una fracción continua

En continuant de cette manière, on trouvera les nombres

$$2,\ 10,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 12,\ \ldots,$$

de sorte que la racine cherchée sera exprimée par cette fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Figura 4. Lagrange (1808, p. 53)

Como su nombre lo indica, partiendo de la definición de continuidad en esa época, una fracción continua será entendida como una expresión en fracción que se presenta en una sola función.

La construcción y tratamiento del método expuesto por Lagrange refleja la susceptibilidad de un planteamiento puramente algebraico sobre lo geométrico, a diferencia de los antecesores que habían estudiado al respecto de la resolución de ecuaciones numéricas. La obra es sin duda una de las fortalezas de la fundamentación algebraica.

Cabe mencionar que el tratamiento Lagrangiano para la resolución de ecuaciones trajo consigo descubrimientos en la matemática, pues no sólo da solución real sino plantea la solución de ecuaciones con raíces imaginarias, asimismo, dicho tratamiento dio pie para el fortalecimiento de los procesos de separación de raíces.

Conclusión

A la resolución de ecuaciones no lineales se les presta poca atención en el sistema escolar. En consecuencia, un graduado de nivel superior, experimenta dificultades encontrándose ante la necesidad de resolver una ecuación trascendente sencilla. (Vilenkin (1984); Ortega y Ortega (2003)). Lo anterior se debe a que, desde la enseñanza elemental de la matemática, hasta el nivel medio superior, se favorecen los métodos determinados sobre los aproximados.

El estudio de la obra de Lagrange, revela un tratamiento de resolución no sólo para ecuaciones lineales sino, en la obra misma, se enfatiza, en la solución de las ecuaciones sin importar su extensión ni su grado. En consecuencia, se plantea retomar la perspectiva histórica epistemológica para realizar acciones a favor de la enseñanza de la matemática ya que uno de sus fundamentos se sujeta en la génesis misma de los conocimientos. Además de que este tipo de análisis permite ampliar los conocimientos alrededor de un concepto, además, de mostrar que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua, y que aunque el contexto de la época cambia sin duda del saber erudito al saber enseñar, se hace necesaria la inclusión de la perspectiva histórica en el desarrollo del conocimiento matemático escolar, pues se dota no sólo al profesor sino al estudiante de un nuevo paradigma de la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., et al. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Ed. Trillas

Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques.* Gauthier-Villars. París.

Ortega, J. F. y Ortega, J. A. (2003). *Matemáticas-0: Un temario a discusión*. Recuperado el 6 de octubre de 2010 de http://www.uv.es/asepuma/XI/04.pdf

Rodríguez, V. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico*. Recuperado el 22 de octubre de 2010 de http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/76557

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía 134*, 449-475.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias 17 (3)*, 463-476.

Vilenkin, N. Ya. (1984). *Método de las aproximaciones sucesivas.* Moscú: Editorial Mir.

Workgroup 15. Theory and research on the role of history in mathematics education. *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st 2009, Lyon France INRP 2010. Recuperado el 22 de marzo de 2011 de www.inrp.fr/editions/cerme6