

LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN QUE EL CONCEPTO DE DIMENSIÓN FINITA DE UN ESPACIO VECTORIAL REAL ES COMPRENDIDO POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Chile

Resumen. El artículo que presentamos a continuación corresponde a una investigación en didáctica del álgebra lineal relacionada al concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito; bajo la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (2000) como marco teórico y un diseño metodológico de estudio de caso múltiple. A partir de esta investigación se obtuvo información respecto al modo de pensar geoméricamente los vectores, así como también su escasa relación con las estructuras matemáticas que sustentan al concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real, por otra parte se pudo comprobar para los cinco casos considerados que el modo de pensamiento que los estudiantes privilegian es el analítico-aritmético, que corresponde sólo a una de los tres modos de pensamiento que según el marco teórico son necesarios para comprender el álgebra lineal.

Palabras clave: álgebra lineal, dimensión, modos de pensamiento

Abstract. The subject of this article is to investigate the linear algebra concept of dimension on a finite real vector space, under the theory of modes of thinking of Anna Sierpinska (2000) theoretical framework, and methodological design of multiple case study. As a result we obtained information about the geometrical way of thinking vectors, and the poor relation with the mathematical structures that support the concept of finite dimension of a finite dimensional real space. On the other hand, we found that of the five cases considered, the students privileged the analytical-arithmetical, being this just one of the three modes of thinking that are needed to understand the linear algebra, according to the theoretical framework under consideration.

Key words: linear algebra, dimension, modes of thinking

Problemática

El presente artículo en didáctica de la matemática tiene como ámbito matemático general el álgebra lineal, tema que según reconocidos investigadores en el área posee variadas dificultades, por ejemplo Dorier y su equipo (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997) hablan acerca del obstáculo del formalismo. Estos autores concluyen que: “para la mayoría de los estudiantes, este tipo de álgebra no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que ellos nunca pueden imaginarse” (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997, p. 116). Dorier & Sierpinska (2001) han reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en desmedro de la comprensión conceptual. Parraguez en el 2009 nos recuerda en su tesis que:

El estudio de la enseñanza del álgebra lineal en algunos programas universitarios, y el fracaso de una buena parte de los estudiantes al abordar los conceptos básicos de esta área ha motivado la creación de grupos de investigación en países como Canadá, Estados Unidos, Francia y México, entre otros. (Parraguez, 2009, p. 22).

Por otra parte, la formación matemática en tópicos de álgebra lineal en carreras de Ingeniería en Universidades Latinoamericanas es hoy y ha sido por muchos años un pilar esencial y siendo la temática del álgebra lineal muy amplia, focalizaremos nuestra atención en el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito. Posicionándonos desde la matemática, la cual se encuentra inmersa en una variedad de contenidos que la sustentan y que los sustenta. Por una parte es necesaria la comprensión de los conceptos matemáticos basales para el álgebra lineal, como el de espacio vectorial real, conceptos de dependencia e independencia lineal, conjuntos generadores, base, hasta finalizar con el concepto de dimensión, el cual dentro de nuestro contexto es un índice invariante que caracteriza clases de espacios a través de los números naturales.

El concepto de dimensión lo entenderemos dentro del álgebra lineal, pero es un tema que va más allá de estas fronteras deslindando con los orígenes del pensamiento geométrico. Desde lo intuitivo la dimensión de un sistema es el número de los parámetros independientes necesarios para describir un punto en el sistema, esta es una concepción próxima a la versión física del concepto. Por lo general, el primer acercamiento del concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito se corresponde con la siguiente definición: “Se dice que un espacio vectorial V tiene dimensión r si tiene una base de r vectores de V ” (Aburto, Johnson y Jiménez, 1996, p. 60).

Por otra parte, a pesar de la existencia de una amplia variedad de investigaciones en didáctica de la matemática relacionada con el tema de “álgebra lineal”, y a los conceptos que ella involucra, no es posible encontrar información explícita en investigaciones sobre el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito. ¿Es posible que este concepto no ofrezca dificultades? Motivadas por esta pregunta plantearemos a la luz del marco teórico de los Modos de Pensamiento de Sierpinska, ¿Cuál es el modo de pensamiento en que estudiantes universitarios mayoritariamente comprenden el concepto de dimensión de un espacio vectorial finito? A continuación una breve reseña sobre el marco teórico.

Marco teórico. Modos de pensamiento

Los modos de pensamiento es un marco teórico de la didáctica de la matemática formulado por Anna Sierpinska, la cual sostiene que el desarrollo del álgebra lineal se inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico, considerando que desde una perspectiva muy general, se podrían distinguir, dos grandes pasos referidos a dos procesos: el primero la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en \mathbf{R}^n y el segundo la desaritmetización del espacio a su estructuración, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los ataban a los números y se convierten

en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de axiomas. De esta forma Sierpinska (2000) define tres modos de pensamiento: el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural, que pueden verse como el resultado de una superación de dos obstáculos: uno que rechaza los números dentro de la geometría y el otro, que rechaza que la “intuición geométrica” pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal utiliza un sistema específico de representaciones.

- ❖ El modo de pensamiento *sintético-geométrico* utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales.
- ❖ En el modo *analítico-aritmético* las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de “n-uplas” de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones. En el modo analítico-aritmético, las componentes numéricas de los objetos geométricos, como puntos o vectores son importantes. Así, por ejemplo: una recta vectorial será reconocida por sus generadores, es decir $\ell_v = \langle (x_1, x_1, \dots, x_n) \rangle$, donde $v = (x_1, x_1, \dots, x_n)$.
- ❖ El pensamiento *analítico-estructural* va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Por ejemplo reconoceremos que un estudiante posee este modo de pensar, si a través del concepto de dimensión logra establecer que dos subespacios vectoriales son isomorfos.

Nos propusimos estudiar el modo de pensamiento que los estudiantes privilegian para comprender el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito, pero por lo que se ha expuesto es esperable que exista una tendencia hacia el modo de pensamiento analítico aritmético, producto de la facilidad que los procesos algorítmicos procuran; por otra parte parecería que el concepto de dimensión se ve restringido a esta realidad algorítmica, por la forma que toma su definición, la cual da cuenta de un simple conteo de vectores, pero la dimensión de un espacio vectorial real, a pesar de su simpleza es un indicador que es capaz de determinar por ejemplo: si dos espacios vectoriales son isomorfos.

Formulamos un cuestionario con el propósito de verificar cual es el modo de pensamiento que nuestros estudiantes privilegian para comprender el concepto de dimensión de un espacio vectorial real, con este propósito se enunciaron preguntas relativas a subespacios del plano y el espacio, para dejar abierto el camino a lo geométrico, además se incluyeron dos preguntas

donde lo geométrico se escondió en apariencia al obstaculizar la forma de encontrar los generadores, con el fin de evidenciar si en la respuesta daba cuenta de lo que significa la aplicación del concepto de dimensión de un espacio vectorial, este tipo de pregunta posee un formato integrador, pues no es puramente aritmética-geométrica-estructural, es necesario integrar los tres modos de pensamiento para responder.

Diseño metodológico

Consideramos para desarrollar la investigación un enfoque metodológico cualitativo, pues está en relación directa con la naturaleza de la problemática a estudiar. Dentro del enfoque cualitativo optamos por un estudio de casos múltiple, dado que se centra en el estudio de dos o más sujetos, situaciones o depósitos de datos (Arnal, Del Rincón & Latorre, 1994), lo cual nos brindara el soporte científico necesario para sustentar nuestras conclusiones.

Para el diseño de la investigación se siguieron los pasos que a continuación detallaremos; un primer momento, para una aproximación de carácter fundacional, con la que formulamos las bases de la investigación, través de la administración de un cuestionario exploratorio, orientado a obtener antecedentes respecto de la caracterización de las variables de conocimiento, valoración y expresión del concepto en estudio, en la configuración conceptual del álgebra lineal, de ejercicio en los actores de la unidad de Estudio, (Tabla 1).

Tabla 1. Resumen de informantes y técnicas de recogida de información.

Tipo de estudiante	Curso	Caso 1	Caso 2
		Ingeniería Civil (15 estudiantes)	Construcción Civil (10 estudiantes)
Universitario	Álgebra lineal	Cuestionario	Cuestionario
		Entrevista	Entrevista
		Registros de observación	Registros de observación

En un segundo momento, acceso al campo de carácter intensivo o en profundidad a 3 carreras –Licenciatura en matemáticas, Licenciatura en física e Ingeniería Civil Industrial –, permitiendo de esta manera una comprensión mas acabada de cómo el concepto de dimensión de un espacio vectorial real de dimensión finita es comprendida por un grupo de estudiantes universitarios, (Tabla 2).

Tabla 2. Resumen de informantes y técnicas de recogida de información.

Tipo de estudiante	Curso	Caso3 (Eg1) Lic. en Matemáticas (1 Estudiante)	Caso4 (Eg2) Ing. Civil industrial (1 Estudiante)	Caso5 (Eg3) Lic. en Física (1 Estudiante)
Estudiante Universitario de último año	Algebra Lineal Realizado hace más de un año.	Cuestionario Entrevista Registros de observación	Cuestionario Entrevista Registros de observación	Cuestionario Entrevista Registros de observación

Las unidades de estudio fueron trabajadas como “casos”, y se vinculan a las siguientes 3 categorías: heterogeneidad de los estudiantes, diversidad de formación y accesibilidad de los investigadores.

Con el marco teórico y metodológico definido, nos propusimos diseñar instrumentos, cuestionarios, entrevistas y registros de observación de los mismos, para la generación de antecedentes que den luces de lo que podría estar sucediendo con la comprensión del concepto en estudio.

Instrumentos de recogida de datos

Para recoger y registrar la información, propia del estudio de caso múltiple, y acceder a la comprensión que tenían los estudiantes sobre la temática en cuestión, es decir el concepto de dimensión de un espacio vectorial real, optamos por la técnica de las entrevistas en profundidad, para el primer momento y para el segundo momento aplicamos un cuestionario, en forma individual, realizado a la luz del marco teórico con el propósito de generar antecedentes en los dos casos del primer momento de la investigación antes mencionados. Por otra parte hemos realizado entrevistas en profundidad. Con respecto al tipo de entrevista utilizado, optamos por una entrevista estructurada, que parte de un guión- cuestionario el cual se aplico en el estudio exploratorio (primer momento), de preguntas abiertas que se han delimitado en función del marco teórico los modos de pensamiento.

A continuación mostraremos una de las preguntas del cuestionario, adjuntando su análisis a priori.

Pregunta

Determinar la dimensión de $V < \mathbf{R}^3$, si se sabe que: $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

La pregunta por un parte persigue un objetivo secundario, identificar la forma en que los estudiantes hacen el cálculo de la dimensión de un espacio vectorial, y por otro, identificar el modo de pensamiento puesto en juego. En otras palabras, mirar si los conceptos insertos en el álgebra lineal que anteceden al de dimensión, como dependencia lineal, base y espacio generado, impiden calcularla adecuadamente. Se plantea la pregunta, definiendo el subespacio vectorial de \mathbf{R}^3 través de una ecuación lineal, en este caso esperamos que el estudiante encuentre una base para el espacio, comprobar que el conjunto propuesto es base, es decir el conjunto es linealmente independiente y genera el subespacio. Al tener el número de generadores tiene la dimensión del espacio.

A partir del modo de pensamiento analítico- aritmético entregamos la siguiente respuesta consideremos una base B_V para V , donde $B_V = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$, es un conjunto linealmente independiente, que genera a V . En efecto $\langle(-1,1,0), (-1,0,1)\rangle \subset V$, también $V \subset \langle(-1,1,0), (-1,0,1)\rangle$, pues si $(x,y,z) \in V$, entonces $x+y+z=0$, de donde $x=-y-z$. Luego $\{(-y-z, y, z)\} \in V$, entonces $\{(-y, y, 0) + (-z, 0, z)\} \in V$, lo que implica que está en el subespacio generado. De esta forma es posible concluir que la $\dim V = 2$, pues B_V posee dos elementos.

Al considerar la geometría en el espacio incluiremos el modo de pensamiento sintético-geométrico y de esta forma asociar la ecuación del plano que describe al espacio vectorial V como un subespacio de dimensión dos, concluyendo desde la geometría la dimensión del plano, bajo el supuesto que un plano posee dos vectores directores (generadores) que lo determinan.

Entre otras respuestas, esperamos de los estudiantes lo que sigue: (a) que determina la dimensión contando el número de ecuaciones que definen a V . En este caso particular es uno, (b) Determine una base para el subespacio, (c) Determine la dimensión a través del vector normal al plano y (d) Determine la dimensión de V restando al número de coordenadas, el número de ecuaciones.

Los momentos y las evidencias obtenidas

En lo que sigue mostraremos algunas de las respuestas de los estudiantes correspondientes al segundo momento de la investigación, con su respectivo análisis a posteriori.

Para dar respuesta a la pregunta Eg1 (estudiante caso 5) realiza los cálculos adecuados en la búsqueda de los generadores que conforman la base del espacio vectorial, (Figura 1).

Haciendo uso, del concepto de generadores de un espacio vectorial como recurso para la búsqueda de la base que le permita calcular la dimensión del espacio vectorial. Podemos decir que su respuesta adhiere al modo de pensamiento analítico –aritmético.

La respuesta de Eg3, caso 5; el estudiante trata de identificar la ecuación con un objeto geométrico, para ello se da puntos en el espacio, prediciendo en primera instancia que es una

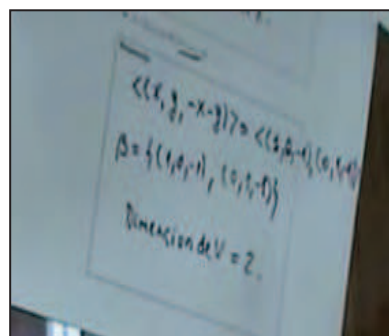


Figura 1. Cálculos pregunta 1.b)

recta y por lo tanto debe tener dimensión uno. Al darse puntos se da cuenta geoméricamente que no es una recta, por lo que la dimensión ya no es uno, concluye que la “figura” correspondiente a la ecuación que define al subespacio, que en realidad está asociada a la gráfica de un plano, es dos.

Lo cual es correcto, su modo de pensamiento es claramente sintético – geométrico. La figura 2 muestra el instante en que el estudiante mediante la visualización, gráfica supone que el espacio definido por la ecuación $x + y + z = 0$ es una recta y al darse puntos logra dudar de que lo sea.

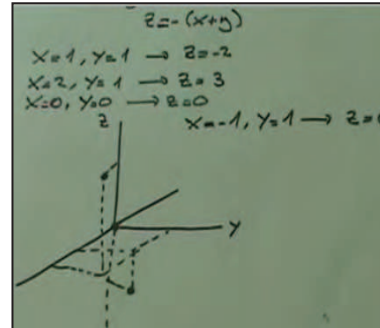


Figura 2. Tratando de ver una recta.

Hemos incluido esta respuesta, pues es una evidencia que el estudiante al poseer un sólo modo de pensamiento, sintético–geométrico, fue capaz de dar respuesta en forma adecuada a la pregunta, se podría pensar que al privilegiar el modo de pensamiento analítico– aritmético se obtienen respuestas adecuadas a las preguntas relativas al concepto de dimensión de un espacio vectorial real, pero ¿es suficiente el manejo de este único modo de pensamiento, para comprender el concepto de dimensión? A continuación algunas conclusiones.

Conclusiones a la luz de las evidencias

De acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes en el cuestionario, tanto en el primer momento de la investigación, como en los tres casos del segundo momento, observamos que para este grupo de estudiantes hacen uso sólo de un modo de pensamiento para dar respuesta a las preguntas planteadas, siendo en forma preferente el modo de pensamiento analítico-aritmético. Además pone en evidencia la necesidad que los estudiantes conozcan las relaciones geométricas que originan los conceptos en el álgebra lineal, es decir, movilizar el modo de pensamiento sintético-geométrico a los otros dos –analítico-aritmético y analítico-estructural- con el propósito de comprender en su totalidad el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real.

Por otra parte un resultado importante que arrojó esta investigación para los casos de estudio, independiente que en su currículo contengan más o menos cursos de geometría, es que no existe una conexión entre los distintos modos de pensamientos al abordar los problemas de dimensión finita de un espacio vectorial real. Observamos también que los estudiantes utilizan un modo de pensamiento y no recurren a los otros aún cuando la situación matemática lo requiera. Asimismo los participantes en la investigación, evidencian dificultades en el modo de

pensamiento analítico-estructural pues no consideran, por ejemplo, las propiedades generales de los subespacios vectoriales.

Para finalizar, queremos propiciar con esta investigación una breve reflexión sobre las estrategias para lograr que nuestros estudiantes realicen los tránsitos entre los diferentes modos de pensamiento, pues es sabido que durante el aprendizaje de los conceptos en matemáticas es usual que los estudiantes adquieran conocimientos mediante una serie de pasos, que observan y luego reproducen, lo que se traduce en una serie de técnicas algorítmicas las cuales lo encasillan en un solo modo de pensamiento, pero para comprender las definiciones es necesaria la reflexión, por esta razón proponemos plantear situaciones desconocidas para el estudiante, donde los algoritmos preestablecidos no sean suficientes, y que propicien el desarrollo entre los diferentes modos de pensamiento como una estrategia para adquirir los conceptos matemáticos, y en este caso el de dimensión de un espacio vectorial real finito.

Referencias Bibliográficas

- Aburto, L., Johnson, R. y Jiménez, D. (1996). *Algebra Lineal*. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Arnal, J., Del Rincón, D. & Latorre, A. (1994). *Investigación Educativa: Fundamentos y Metodología*. Barcelona: Labor.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, R. & Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp. 105-147). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Dorier, J. & L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.
- Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En Dorier, J. L. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.