SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE REFERENCIA DE LOS POLINOMIOS EN EDUCACIÓN MEDIA GENERAL

Dorenis Mota, Mario Arrieche
Universidad de Carabobo y Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay Venezuela
dorenismota@yahoo.es, marioarrieche@hotmail.com

Resumen. Se presentan algunos resultados de una investigación titulada "significados institucionales de los polinomios en Educación Media General" que se está desarrollando en Venezuela. Se caracterizan los significados institucionales de referencia de los polinomios, describiéndose aquellos elementos históricos y epistemológicos que hicieron posible su concepción actual. Como referente teórico se emplearon herramientas del modelo ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática propuesto por Godino (2003) como la noción de significado institucional de referencia, las entidades primarias que dan lugar a un objeto matemático y las configuraciones epistémicas que surgen a partir de la interacción entre esas entidades. Metodológicamente es un estudio interpretativo de corte documental. Entre los hallazgos se destacan la evolución del lenguaje algebraico (notación de los polinomios a través del tiempo), la noción de variable, exponente y el cálculo de raíces de polinomios.

Palabras clave: polinomios, historia de la matemática, epistemología, modelo ontológico y semiótico

Abstract. In this article they present some results of a titled investigation " institutional meanings of the polynomials in a Medium General Education " which is developing in Venezuela, in this opportunity there are characterized the institutional meanings of polynomial's reference, those historical and epistemological elements have been described that made possible his current conception. Since theoretical modal tools of the ontological and semiotic model of the cognition and mathematical instruction proposed by Godino (2003) as the notion of institutional meaning of reference, the primary entities are giving a place to a mathematical object and the epistemic configurations that are formed from the interaction between those entities. Methodologically it is an interpretive study of documentary cut. Between the findings they emphasize the evolution of the algebraic language (notation of the polynomials across the time), the notion of variable, exponent and the calculation of roots of polynomials.

Key words: polynomials, history of mathematics, epistemology, ontological and semiotic model

Introducción

La realización de un análisis histórico-epistemológico sobre los polinomios, permitirá clarificar la naturaleza y los diversos significados que puedan ser atribuidos a este objeto matemático a lo largo del tiempo, (Godino, 2003; Arrieche 2002; Arrieche, 2010), ya que se dará respuesta a interrogantes como: ¿Cuál es el origen de los polinomios? ¿Cómo ha evolucionado a lo largo del tiempo este objeto matemático? ¿Cuál es la importancia que tiene para la matemática y como aplicación a otras ciencias?

En las próximas páginas se le espera dar respuesta a las interrogantes del párrafo anterior, no sin antes aclarar que dichas respuestas no son absolutas, puesto que estarán inevitablemente afectadas por la subjetividad del investigador y de los documentos bibliográficos que se emplearon para tal fin. En este caso se realizó una revisión de libros de historia de la matemática, trabajos de investigaciones de Maestría afines, tesis doctorales, memorias de eventos sobre investigaciones en didáctica de la matemática y revistas digitales e impresas.

El material fue analizado utilizando categorías propuestas por el modelo Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, entre estas, la noción de significado institucional de referencia que responde a aquellos textos matemáticos correspondientes a un objeto matemático, a orientaciones curriculares y, de manera general, a la consideración de los expertos sobre tal objeto; grosso modo, en esta oportunidad, es el conocimiento válido para las instituciones matemáticas y didácticas. Para describir el significado de referencia de los polinomios se recurrió a libros de historia de la matemática, trabajos de grado de Maestría, tesis doctorales, artículos científicos, entre otros, todos relacionados con la historia de los polinomios. El análisis del material consultado se hizo mediante el uso de las entidades primarias (situación problema, acciones o procedimientos, conceptos, propiedades, argumentaciones y lenguaje) que son elementos de ese significado; por último, y no menos importante, está el constructo de configuración epistémica que se forma cuando esas entidades interactúan entre sí y le dan sentido a la actividad matemática. (Godino, 2002).

Origen y evolución de los polinomios

Los polinomios están presentes prácticamente en los primeros registros matemáticos de los que se tiene conocimiento; y eso se hace evidente en el cálculo de ceros o raíces de polinomios que forman parte de los problemas más antiguos conocidos, estos problemas se han encontrado en el estudio de la matemática de civilizaciones antiguas, entre ellas Babilonia y Egipto.

De Babilonia puede afirmarse que la resolución de los ceros de polinomios de grado dos y tres constituyó un logro que vale la pena señalar, no únicamente por el alto nivel de habilidad técnica sino también por la madurez y flexibilidad de los conceptos algebraicos que intervienen en el proceso si se toma en consideración que los babilonios no empleaban la simbología utilizada actualmente, así "El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción tan extraordinario que las ecuaciones $ax^4+bx^2=c$ y $ax^8+bx^4=c$ fueron consideradas correctamente como simples ecuaciones cuadráticas disfrazadas, es decir, como ecuaciones cuadráticas en x^2 y x^4" (Boyer, 1986, p. 58). En ese mismo orden de ideas, Pastor y Babini (2000) señalaron que, desde el punto de vista matemático, la resolución de esas ecuaciones lineales y cuadráticas son las novedades más relevantes de los textos babilónicos.

En relación a la civilización egipcia, vale la pena destacar el carácter práctico que predomina en los Papiros egipcios estudiados, cuyo elemento principal es el cálculo numérico de cuestiones específicas planteadas. Parece que el objetivo estuvo dirigido a facilitar o justificar los procedimientos empleados más que a la búsqueda del por qué de las teorías implícitas, por lo tanto no existen generalidades sino el estudio de casos muy concretos. (Ortega, 2002).

Por su lado, historiadores como Bell (1985) mencionan que los griegos tenían que haber conocido de alguna manera el álgebra babilónica para avanzar en su matemática, pero no hay evidencia concreta de ello, lo cierto es, que gracias a los aportes de estos últimos hubo un gran avance no sólo en el álgebra sino en el desarrollo de la matemática misma.

Muchos de estos avances se le atribuyen a matemáticos de la época, entre ellos está Diofanto, al respecto Boyer (1986) asegura que la diferencia existente entre la sincopación diofántica y la notación algebraica moderna está en la ausencia de simbología para las operaciones y para la notación exponencial y en las relaciones, lo que le da el título a Diofanto de ser considerado "el padre del álgebra". Bell (1985) por su parte asegura que Diofanto no solamente hizo aportaciones en la notación algebraica, además de plantear soluciones a problemas de esta disciplina. A diferencia de la solución que muchos planteaban a esos mismos problemas de forma geométrica, dichos problemas estaban relacionados con el cálculo de las raíces de polinomios de primer grado con dos o tres incógnitas. Otro matemático griego que influyó considerablemente en el origen del álgebra fue Euclides, en su trabajo puede evidenciarse la relación de ciertas expresiones polinómicas con la geometría, donde problemas relacionados con el cálculo del área de ciertos rectángulos fueron determinantes.

En China se han encontrado documentos que confirman la contribución de esta civilización a la consolidación del álgebra, y por consiguiente a la de los polinomios. Estos documentos son los de Chi´n Chiu-Shau (siglos X y XI) y Chu Shin-Chieh (siglo XIV), el primero destaca en su obra (las nueve secciones de matemática) problemas relacionados con agricultura, agrimensura, ingeniería, impuestos, entre otros, en los que se resuelven ecuaciones algebraicas tanto determinadas como indeterminadas, empleando cierto simbolismo rudimentario, cuya forma de resolución era parecida a la que actualmente se le conoce con el método de Ruffini-Horner. El segundo estudia ecuaciones y sistemas hasta de grado 4 en el tratado titulado "el precioso espejo de los cuatro elementos", allí hace uso de un triángulo conocido hoy en día como triángulo de Pascal, y se emplea un método para hallar las raíces de los polinomios de diferentes grados llamado fan-fa que consiste en la aplicación de cambios de variables.

En cuanto a la matemática hindú, se tiene que contribuyó significativamente al lenguaje algebraico ya que fue precursora del álgebra sincopada; los hindúes diferenciaban los números positivos y negativos, que eran interpretados como créditos y débitos para los que existían símbolos específicos, permitiéndoles unificar así las ecuaciones de segundo grado en un tipo único, sin importar el valor de los coeficientes y donde se podían admitir soluciones negativas sin problema alguno, aunque no se tomaban en consideración. Entre los matemáticos hindúes de mayor trascendencia por los trabajos que realizaron en relación al álgebra se pueden mencionar Brahmagupta (siglo VII) y Bhaskara (siglo XII).

En tanto la matemática árabe, partiendo del trabajo de Al-Khowarizmi, quien motivado por los problemas de la época relacionados con leyes y herencias, escribió el Al-jabr sin sospechar que la influencia de su trabajo trascendería y se diseminaría por toda Europa años más tarde perdurando por largo tiempo. Gracias a las traducciones del nombre de Al-Khowarizmi al latín nace la palabra algoritmo, con la que hoy se designa a todo aquel procedimiento matemático empleado en la resolución algebraica de cualquier problema o ejercicio, y de su obra heredamos la palabra álgebra, que también constituye en el presente el nombre una de las ramas de esta Ciencia formal. En la obra de Al-Khowarizmi se muestran problemas de distinta naturaleza, y eso se le atribuye quizás a la influencia de la matemática babilónica, egipcia y griega en esta civilización, ya que los problemas allí planteados recogen los aspectos conocidos por esas civilizaciones. Otro matemático que dejó huellas en la matemática árabe fue Omar Khayyam (1050-1123) quien extendió la obra de Al-Khowarizmi al hallar de forma geométrica (usando intersección de secciones cónicas) las raíces de polinomios de grado tres.

En relación a la matemática desde la época Medieval hasta el Renacimiento, se tomarán en cuenta algunas reflexiones que Ortega (2002) hace al respecto donde señala que el trabajo matemático de esos siglos estuvo motivado originalmente por la necesidad de estudiar más a fondo las obras de la matemática griega que llegaron a manos de muchos matemáticos gracias a la imprenta, pero no se pueden descartar las motivaciones de tipo práctico (los comerciantes y los contadores se planteaban problemas de cálculo, los artistas presentaban dilemas para ser resueltos geométricamente, entre otros). Sin embargo, más allá de esto último, se cree que el factor que influyó considerablemente en el desarrollo del álgebra en esa época fue el estilo.

> […] casi deportivo que acicateó a los matemáticos para desafiarse públicamente. Como en ningún otro momento de la historia, estas competencias llegaron incluso a motivar al público en general y el aspecto lúdico de la matemática tuvo un papel importante entre las motivaciones que hicieron avanzar las teorías matemáticas. (Ortega, 2002, p. 43)

Entre los matemáticos que tuvieron protagonismo en esta época por su destacado trabajo en el campo del álgebra, y más específicamente en la resolución de polinomios de grado uno, dos tres y cuatro, están: Leonardo Pisano mejor conocido como Fibonacci, Sciope del Ferro, Antonio María Fior, Niccoló Fontana o Tartaglia, Gerone Cardano, Ludovico Ferrari y Rafael Bombelli.

Para finales del siglo XVI y el desarrollo del siglo XVII, floreció el álgebra simbólica, mediante los trabajos de François Viète (1540-1603), Thomas Harriot (1560-1621) y René Descartes (1596-1650) y, como era de esperarse con ese desarrollo, también estuvo involucrada intrínsecamente la evolución de los polinomios. El trabajo de Viète tuvo un gran impacto para otros matemáticos debido al uso de simbología en la solución de los problemas que se planteaba, por ejemplo, fue el primero en designar las primeras letras del abecedario para los valores conocidos y las últimas para las incógnitas (tal como se usan actualmente). Entre esos matemáticos, que fueron influidos por Viète, estuvo Harriot a quien se le atribuye no sólo la continuidad del uso del simbolismo que tomó de Viète sino la introducción de otros tales como los que representan la relación de orden entre cantidades (mayor que > y menos que <). Así mismo Descartes, también da aportes interesantes al álgebra y a los polinomios en su obra *Géometrie*, donde resuelve problemas que involucran el cálculo de raíces de polinomios de grados mayores que dos, empleando propiedades novedosas para la época.

Luego de estas aportaciones, según Bell (1985), no parece haber una contribución importante hacia los polinomios hasta el siglo XVIII cuando matemáticos como Tschirnhaus (1651-1708) se preocuparon por hallar una solución general de tipo racional para el cálculo de raíces de funciones polinómicas de cuarto grado, pero sin tener éxito en las de quinto grado. Un siglo después, aproximadamente en 1786, Bring (1736-1798) redujo la ecuación general de quinto grado a la forma de trinomio $x^5+ax+b=0$, sustentándose en una demostración de Tschirnhaus con coeficientes afectados de una raíz cúbica y de tres raíces cuadradas, resultando de gran importancia para la solución de la ecuación de quinto de grado de manera trascendental.

Posteriormente Euler resolvió la ecuación general de cuarto grado por un método distinto al de Ferrari en 1770 pero, al igual que Tschirnhaus, no tuvo éxito con las que quinto grado. Entre los años de 1770 y 1771 Lagrange intentó resolver la ecuación general de cuarto grado con nuevos métodos a los acostumbrados y parecía que había encontrado una expresión general hasta que, topándose con una ecuación de quinto grado, no pudo reducirla, al contrario, su grado aumentó en un valor; no obstante parece no haber notado que estas ecuaciones no tendrían solución por ese camino.

En este momento histórico surgió una importante reestructuración del álgebra y de los polinomios como consecuencia del incremento de científicos interesados en esta ciencia, provenientes principalmente de países como Inglaterra, Francia y Alemania, Italia, Rusia, Suiza y los Países Nórdicos y Estados Unidos. Pérez (2004) afirma que dicha reestructuración se inicia con el teorema fundamental del álgebra cuya demostración rigurosa del mismo se le atribuye a Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Sin embargo, esta demostración no fue tan precisa como la que mostró Argand luego en 1806.

En esta época la preocupación seguía siendo la manera de hallar la solución general a ecuaciones polinómicas de un grado mayor al cuarto grado, a la cual Gauss también hizo su contribución dando una respuesta a la ecuación $x^n-1=0$ con n primo impar, con la aparición de grupos cíclicos; es así como Ruffini (1765-1822) plantea la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado pero sin lograr demostrar tal planteamiento. En tanto Abel (1802-1829), después de encontrar el error en lo que creyó era la solución de estas ecuaciones mediante radicales, demostró definitivamente la imposibilidad de resolver esas ecuaciones mediante radicales empleando argumentos más poderosos que los usados por Ruffini. Este resultado fue el inicio de la teoría de Galois (1811-1832) quien estudió las relaciones existentes entre las raíces de los polinomios.

Algunas aplicaciones de los polinomios

Desde entonces hasta hoy en día, los polinomios constituyen una herramienta dentro de la misma matemática y para el desarrollo de otras ciencias. En problemas intramatemáticos podemos citar, por ejemplo, la relación de los polinomios en geometría donde éstos intervienen en el cálculo del área de ciertos polígonos y del volumen de algunos sólidos, también existe un fuerte vínculo entre los polinomios y el cálculo diferencial e integral, y esto se hace evidente en tópicos como límites, integrales y ecuaciones diferenciales. En el caso de otras ciencias, por mencionar algunas, se ve una fuerte influencia de los polinomios modelizando problemas en el área de la física, la tecnología, la biología, la administración, entre otros. Cabe destacar que esto es sólo una muestra de la cantidad de aplicaciones que este contenido algebraico ha tenido en el desarrollo de la matemática y de otras áreas del saber científico.

Síntesis y conclusiones

A manera de síntesis se presentará en el Cuadro No 1 las configuraciones epistémicas de las principales civilizaciones involucradas en el origen y la evolución de los polinomios, así como algunas de las aplicaciones que se le dan a este objeto matemático en la actualidad; ello se hará tomando en cuenta las entidades primarias (lenguaje, situación problema, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones) extraídas del Enfoque Ontológico y Semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003).

Cuadro No 1: Configuración epistémica de los polinomios.

ENTIDAD PRIMARIA / CIVILIZACIÓN		LENGUAJE	SITUACIÓN PROBLEMA	PROCEDIMIENTOS	DEFINICIONES/ PROPIEDADES	ARGUMENTA- CIONES
BABILONIA		Retórico (netamente verbal)	De aplicación: cálculo de área, agrimensura, comercio. Con sospecha de alguna actividad de carácter recreativo.	Uso de tablillas con respuestas aproximadas, método de "sustitución" y completación de cuadrados.	Área, largo, ancho, no obstante no estaban explícitos como tal.	No se evidenciaban, al parecer los problemas se trataban de casos particulares.
EGIPTO		Escritura hierática o sagrada. Tosca representación gráfica.	Relativos a la aritmética, cálculo de cantidades. Longitudes relacionadas con situaciones de su cotidianidad.	"falsa posición" o "regula falsi", factorización, adición de fracciones (los dos últimos para algunos problemas)	Cantidad, igualdad de cantidades. Altura, largo, ancho y volumen de ciertas figuras geométricas.	No se evidenciaban, al parecer los problemas se trataban de casos particulares. Es decir, sin generalización alguna.
GRECIA	HELÉNICOS Y HELENÍSTICOS	Retórico y geométrico	De tipo geométrico al parecer propuestos por mera curiosidad matemática.	Proposiciones del libro de Euclides	Área, figuras geométricas planas: cuadrado, rectángulo.	Los problemas eran particulares, pero alguno de ellos relacionados entre sí que suponían algún tipo de generalización.
	DIOFANTO	Sincópado: empleo de primeras notaciones algebraicas.	Aritméticos relativos al cálculo de raíces de grado uno, dos y tres.	Método diofántico.	Conservación de la igualdad, números positivos,	Parece algún tipo de analogías en varios de los problemas pero no se evidencian indicios de axiomatización.
CHINA		Sincópado	Relativos a la agrimensura, agricultura, compañía, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.	El método del Fan fa conocido posteriormente como el método de Horter-Ruffini.	Elementos de una ecuación: variable, exponente, coeficiente y cambio de variable o transformación.	Los Chinos reconocían el gran alcance y la generalidad del método fan fa mediante el trabajo de Chu Shih-Chieh
INDIA		Sincópado	Los problemas involucran la resolución de ecuaciones cuadráticas o cálculo de raíces de polinomios de segundo grado, al parecer motivados por el deseo del desarrollo de la matemática como un arte.	Se halla la fórmula general de la ecuación lineal x=p+mb,y=q-ma, donde m es un entero arbitrario sabiéndose que el máximo divisor de a y b debe dividir a c, y a y b son primos entres sí. También se estudia la ecuación cuadrática de Diofanto $x^2=1+py^2$.	Se manejan los números negativos como parte de la solución, se tiene noción de números primos, máximos divisores, números enteros.	Se asumen algunas generalidades, ya que se aplica un mismo método (hallar una solución a partir de otra solución ya conocida) a varias ecuaciones similares.
ARABIA		Retórico (un paso atrás en el simbolismo)	Problemas relacionados con las leyes que regían la herencia de la época, también existía una motivación por el desarrollo de la matemática como expresión del arte y en algunas ocasiones se escribían los problemas en forma poética.	Completación de cuadrados, intersección de secciones cónicas (polinomios de tercer grado)	Conocimiento de la representación gráfica de ciertas curvas (secciones cónicas) y el vínculo de estas con expresiones polinómicas de tercer grado.	No se especifican generalidades, se toman en cuenta sólo problemas particulares y de distintas naturaleza (aritmética, algebraica, geométrica).

EUROPA MEDIEVAL (SIGLO XIII) HASTA EL RENACIMIENTO (SIGLO XV Y XVI)	Retórico - Sincópado	El interés era encontrar la solución general para el cálculo de raíces de polinomios de grado tres y cuatro motivados por el carácter competitivo.	Reducción de polinomios de grado tres a polinomios de grado dos mediante el cambio de variable y sustitución; para el cálculo de raíces de polinomios de cuarto grado, se introduce un término indeterminado en una diferencia de cuadrados.	Concepto de ecuación, trinomio cuadrado perfecto, factorización, diferencia de cuadrados, raíz cuadradas, entre otros.	Se conocían las bondades que puede proporcionar el hallazgo de formas generales para el cálculo de raíces de polinomios de grado tres y cuatro y se trabajaba en eso,
FINALES DEL SIGLO XVI Y SIGLO XVII	Sincópado - Simbólico (importante desarrollo del lenguaje algebraico)	Se plantearon problemas sobre el cálculo de raíces de polinomios de segundo, tercer, cuarto y hasta de sexto grado, se establece la relación entre expresiones algebraicas y las curvas que las representan.	Se introducen nuevas incógnitas para reducir ecuaciones de cúbicas a cuadradas; empleo del método Horner para la resolución aproximada de ecuaciones, se usa el método algebraico para ecuaciones de tercer grado,	Relación entre raíces y coeficientes de polinomios, la factorización, la noción de aproximación; se ignoran los valores negativos de las raíces cuadradas.	Existe gran interés en la generalización y en la creación de un lenguaje que permitiera la unificación de criterios y evitara la complicación que supone el uso del lenguaje verbal.
SIGLO XVIII HASTA LA ACTUALIDAD	Simbólico	Se esclarecerse la situación de la búsqueda de la fórmula general para el cálculo de raíces de polinomios de quinto grado en adelante, demostrándose y aceptándose la inexistencia de tal fórmula, desde entonces el enfoque ha sido el desarrollo de problemas vinculados a la relación existente entre las raíces de los polinomios y las numerosas aplicaciones de este objeto matemático tanto dentro de la misma matemática como para otras ciencias.	Se aplican para el cálculo de raíces de polinomios de cuarto grados o menores los métodos actualmente conocidos: factorización, completación de cuadrados, resolvente… también se incorpora el teorema de Abel – Ruffini y se aplica para el desarrollo de ciertos polinomios el teorema del binomio de Newton.	Se tiene una clara idea de los conceptos que rodean al polinomio y a la relación de este con sus raíces.	Se demuestran y establecen teoremas que desde entonces rigen las pautas de los trabajos que se realizan con polinomios, entre ellos: El teorema de Abel – Riffini, el del binomio de Newton y el Teorema Fundamental del Álgebra.

Referencias bibliográficas

Arrieche, M. (2010). *Significados Institucionales y Personales del objeto matemático función en la Formación de Profesores de Educación Integral.* Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay, Venezuela.

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Bell, E. T. (1985). Historia de las Matemáticas. (2° edición), México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2/3), 237–284.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Recuperado el 12 de diciembre de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Ortega, I. (2002). *La historia que vivieron los matemáticos*. Recuperado el 04 de marzo de 2011 de http://personales.ya.com/casanchi/did/historia.pdf

Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática.* Barcelona: Gedisa.

Pérez, J. (2004). *El quehacer matemático. Un recorrido por la historia. Parte II la matemática en el siglo XVII*. Recuperado el 04 de marzo de 2011 de http://personales.ya.com/casanchi/did/historia.pdf