LA ARISTA LÓGICA DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE: EL CASO DE LOS CONCEPTOS EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Celia Rizo, Luis Campistrous
Universidad Autónoma de Guerrero México
Instituto Central de Ciencias Pedagógicas Cuba
celrizo@yahoo.com.mx

Resumen. En este artículo se hace una incursión en el trabajo con conceptos, como una de las tres formas básicas de explicación del mundo, conjuntamente con los juicios y los razonamientos que no serán abordados en esta oportunidad. También se presentan algunos de los procedimientos lógicos asociados al trabajo con conceptos y se ejemplificará su uso en la matemática, aunque los conocimientos y el uso de la lógica no es exclusiva de ella. La intención es destacar la importancia de desarrollar adecuadamente el pensamiento lógico en la escuela, desde edades tempranas y la contribución, positiva o negativa que puede tener en ese desarrollo los medios de enseñanza que están establecidos.

Palabras clave: conceptos, pensamiento lógico, procedimientos lógicos del pensamiento

Abstract. In this article an incursion is done in the work by concepts, as one of three basic forms of explanation of the world, together with the judgments and the reasonings that will not be approached in this opportunity. Also they present some of the logical procedures associated with the work with concepts and his use will be exemplified in the mathematics, though the knowledge and the use of the logic is not exclusive of her. The intention is to emphasize the importance of developing adequately the logical thought in the school, from early ages, and the contribution, positive or negative that can have in this development the means of education that are established.

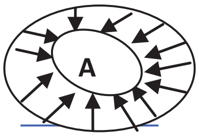
Key words: concepts, logical thought, logical procedures of the thought

Introducción

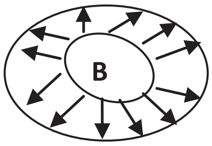
En este artículo, el término "lógica" se usa referido a lo relacionado con el pensamiento o la razón, esto nos remite a un rasgo esencial del ser humano: la racionalidad. Esta característica de los seres humanos significa que pensamos racionalmente y para ello nos valemos de la utilización de conceptos, juicios y razonamientos. Dentro de la formación de esta arista lógica del conocimiento es esencial aprender a operar correctamente con la extensión de los conceptos, pues las transformaciones que va a hacer de la realidad objetiva las "adelanta" al operar con ellos, aspecto que ocupa este artículo sobre el trabajo con conceptos. En el caso de la enseñanza de la matemática y de su didáctica, este componente lógico es esencial.

Operaciones lógicas con conceptos

Entre las que más se utilizan en la escuela se encuentran la limitación y generalización, la división y dentro de ella el caso especial de la clasificación, y la definición. A continuación se precisarán algunas ideas acerca de estas operaciones con conceptos. La limitación de conceptos significa que se añaden propiedades esenciales al concepto y por ello aumenta su contenido (tiene más propiedades esenciales pero disminuye su extensión, o sea la cantidad de representantes que tengan esa propiedad.



Caso A: Pasar de un concepto a otro subordinado: Limitación



Caso B: Pasar de un con-cepto a otro subordinante:

Por ejemplo si se parte del concepto "cuadrilátero y se añade la propiedad de "tener sus cuatro lados iguales" estamos en presencia de un nuevo concepto que es el de rombo. Observen que se ha aumentado el contenido del concepto (mas propiedades) de cuadrilátero pasan a ser rombos por lo que la extensión disminuye porque ya todos los cuadriláteros no están. En este caso el rasgo escogido es "la igualdad de sus lados". Igual sucede si al conjunto de los dígitos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} le añades la condición de que sus elementos sean todos pares, entonces queda {0,2,4,6,8} que es un conjunto más limitado que el original.

El caso contrario a la limitación es la generalización de conceptos, que significa pasar de un concepto a otro subordinante, es decir se limita el contenido, aunque aumenta su extensión. Esta acción significa que se debe renunciar a algunas propiedades esenciales para obtener una clase de objetos que es más amplia pues satisface todas las propiedades esenciales del concepto dado. Al hacer esta operación se escoge un rasgo del concepto con respecto al cual se hará la generalización y que determina qué propiedades esenciales se suprimen. En ambos casos es posible volver a hacer una generalización renunciando a la otra propiedad y se obtiene un paralelogramo. Por el contrario, limitar un concepto es pasar a otro subordinado para lo cual se deben añadir propiedades esenciales. También en este caso se escoge un rasgo que determina las propiedades que se añaden.

Un ejemplo de ***generalización*** es el del cuadrado cuando se prescinde de la **perpendicularidad** y se obtiene el rombo.

Un ejemplo de limitación es el del rectángulo cuando se añade la igualdad de los cuatro lados y se obtiene el cuadrado

División

El estudio de un concepto se facilita cuando se separa su extensión en grupos caracterizados por poseer determinadas propiedades. Esta separación se hace recurriendo a otra operación lógica con los conceptos: la división. Desde el punto de vista de la lógica, esta división debe hacerse a partir del contenido del concepto. Es decir, no se trata de analizar objeto por objeto de los que pertenecen al concepto y separarlos en grupos, lo que puede ser imposible. Se trata de escoger un rasgo determinado y según ese rasgo distribuirlos en diferentes grupos. Ese rasgo constituye la base de la división. Por ejemplo, en una escuela hay 150 alumnos de un grado. Como no es posible ubicarlos en un solo grupo, es necesario por lo menos, dividirlos en tres grupos. Esta división se puede de diferentes maneras, aunque es muy natural y simple repartirlos atendiendo a un determinado rasgo que pudiera ser según la inicial del apellido (A-F; G-P; Q-Z), por la fecha de nacimiento o por la región de procedencia, entre otros rasgos.

Es evidente que al hacer esto hay que tener algunos cuidados, entre ellos que se incluyan a todos y que la división se haga siguiendo un solo criterio. No se podría separar atendiendo a la inicial del apellido y a la fecha de nacimiento pues pudiera ocurrir que un alumno tuviera que estar en un grupo por la inicial y en otro, por la fecha de nacimiento.

a) Un mismo alumno no se puede inscribir en más de un grupo.

b) Cuando los grupos obtenidos por una división se subdividen a su vez, no pueden saltarse etapas. Por ejemplo, si en cada grupo se consideran las filas como una subdivisión, no pueden dividirse los alumnos en grupo A, grupo B, fila 1, fila 2 (no pueden dividirse a la vez por grupos y por filas, pues son dos escalones distintos).

Resumiendo:

> La división es la operación lógica que consiste en dividir la extensión del concepto en clases, atendiendo a un rasgo o criterio escogido de antemano al que se le denomina base de la división.

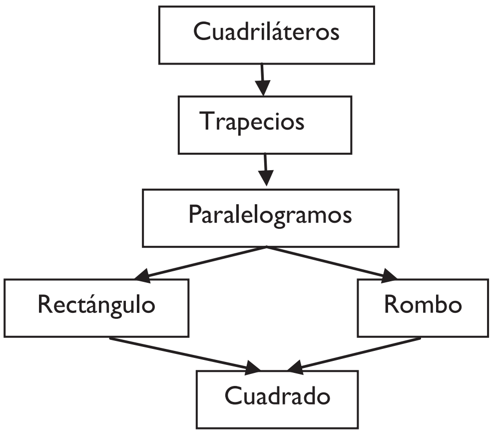
La división está sometida a leyes:

- Debe ser proporcionada (incluye a todos los objetos).
- Se hace sobre una sola base.
- Las clases deben ser disjuntas (sin elementos comunes).
- Debe ser continua, sin saltos.

Clasificación

Un ejemplo muy importante de división es la denominada clasificación que se utiliza mucho en el trabajo en matemática y en otras áreas de conocimiento como la Biología. Es importante entonces destacar que Cuando una división es estable, o sea, agrupa los objetos en clases por semejanzas esenciales, y estas clases además de disjuntas son exhaustivas, o sea todo elemento está solo en algunas de ellas, se llama clasificación. A continuación se ponen ejemplos con incorrecciones para que comprendan mejor el concepto de división, y en especial el de clasificación que es el que más se usa en la enseñanza.

Un caso en el que comúnmente se cometen errores y que es necesario mostrar es considerar una "clasificación", que en realidad no lo, es como es el caso de la los cuadriláteros cuando se subdividen en trapecios y paralelogramos y este último, en rectángulo y rombo y ambos relacionados con el cuadrado.



En este caso se presenta otra forma lógica importante del trabajo con conceptos que es la sistematización, en este caso de los cuadriláteros, que se puede representar como se aprecia en el modelo a la derecha. En ese modelo se hace visible que no es una clasificación pues las clases no son disjuntas, pero si es una sistematización en la que se puede distinguir las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes conceptos derivados.

Una manera inmediata de decidir que no es una clasificación, es que las clases no son disjuntas!

Un ejemplo correcto de clasificación es la de los triángulos según sus ángulos, que se clasifican en acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

Definicion

Esta es una de las más importantes operaciones lógicas con conceptos porque es la que está asociada a la explicación del significado. En síntesis, es la que asocia al nombre del concepto su contenido.

La definición es la operación lógica que consiste en precisar el significado del concepto mediante la concreción de los rasgos esenciales y la diferenciación de otros conceptos parecidos

Ahora bien, la explicación del significado no es algo simple, pues para aclarar un término hay que utilizar otros, que a su vez necesitan aclaración. Estas complejidades de la definición son muy visibles en las que aparecen en el diccionario. Entre estos problemas de las definiciones del diccionario se encuentran la circularidad, la falta de actualización, la falta de precisión, por lo que objetos diferentes se describen casi igual, y por último el inconveniente de que no todas las definiciones dicen lo mismo.

Con respecto a los diferentes significados de un término, hay que destacar que en los casos de términos muy frecuentes en el lenguaje común, el mismo término denota muchos conceptos relacionados entre sí y, por tanto, se tiene la sensación de vaguedad, ya que en diferentes lenguas momentos y para diferentes personas, el nombre representa conceptos distintos según las necesidades y las costumbres. Por ejemplo, guagua: en la norma cubana significa ómnibus, pero en otros lugares de América significa niño.

Este problema de los diferentes significados para un mismo término es típico en las Ciencias Sociales. No obstante, por el carácter de "ciencia exacta" que se le atribuye a la matemática, por lo general no sucede, aunque siempre es conveniente precisar el significado tal y como lo entiende cada uno, para evitar discutir sobre conceptos diferentes con un mismo nombre. Algunos ejemplos que evidencian el problema de los diferentes significados para un mismo término como es el caso del concepto triángulo el que se puede definir como:

- La figura que se forma cuando se unen, dos a dos, tres puntos no alineados.
- Un polígono de tres lados.

En este caso los significados se puede decir que son equivalentes porque ambos son conceptos con la misma extensión. Podemos ver que la precisión del significado de un concepto se hace mediante palabras que lo denotan y esto complica la comprensión, ya que no siempre las palabras tienen un significado preciso y claro.

Uno cuyo <u>significado se quiere precisar</u> definiens o determinado	Otro cuyo <u>significado es conocido</u> definiendum o determinante

Como antes se planteó, la definición es la operación lógica que consiste en precisar el significado del concepto mediante la concreción de los rasgos esenciales y la diferenciación de otros conceptos parecidos. Esta concreción de los rasgos esenciales supone, casi siempre, la utilización de otro concepto, es decir, en las definiciones se relacionan dos conceptos: El concepto conocido es el determinante o definiendum mientras el que se quiere definir es el determinado o definiens.

Tipos y definiciones explícitas

Las definiciones explícitas pueden ser por sinónimo, genéticas y por género próximo y diferencia específica.

- Definición por sinónimo: A veces el concepto determinante y el determinado son equivalentes (los términos que designan son sinónimos), y es suficiente definir uno mediante el otro. Por ejemplo, en algunos países se le llama examen a una investigación.

En matemática esto es muy poco usual. En general, este tipo de definición puede ser criticado pues dos términos no son nunca sinónimos exactos. En este tipo de definición se establece explícitamente el significado del concepto, por eso es un tipo de definición explícita. Otros tipos de definiciones explícitas son las genéticas y las definiciones por género próximo y diferencia específica.

❖ En las definiciones genéticas, se determina el concepto describiendo su origen. Por ejemplo, en el libro de Matemática de Sexto Grado en Cuba, se denomina ángulo a la unión o intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan o intersecan.

❖ Las definiciones por género próximo y diferencia específica son consideradas por algunos autores como las más adecuadas. Quizás esto sea una exageración, pero algo sí es cierto: no solo explican el significado sino que también llaman la atención sobre las propiedades diferenciantes. Es una de las más utilizadas en la matemática. Como su nombre lo indica, en estas definiciones se determina un concepto subordinante (género próximo) del que se quiere definir y se expresan las propiedades que lo diferencian de los restantes subordinados al mismo género (diferencia específica). Por ejemplo, la definición de "rectángulo" cuando la misma se expresa de la forma siguiente: Es un paralelogramo (género próximo) en el que los lados consecutivos son perpendiculares (diferencia específica).

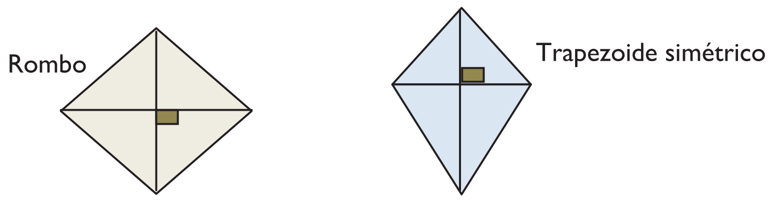
Entre los peligros de usar este tipo de definición se encuentran los siguientes:

❖ Que el definiendum y el definiens no sean equivalentes. Esto sucede cuando:

Las propiedades diferenciantes sean excesivas o escasas. En este caso la definición no es proporcionada, es o demasiado estrecha o demasiado amplia. Algunos ejemplos son:

♦ Movimiento rectilíneo uniforme es el movimiento en el que el cuerpo recorre espacios iguales en tiempos iguales. Observen que esta definición es demasiado amplia pues esa condición la cumple también, por ejemplo, el movimiento circular uniforme.

♦ Rombo es el cuadrilátero con diagonales perpendiculares. Observen que también el trapezoide simétrico cumple esa condición.



- Rectángulo es un paralelogramo con lados consecutivos perpendiculares e iguales. Esta definición es demasiado estrecha pues solo incluye al cuadrado.
- Mesa es un mueble que consiste en una tabla sostenida por cuatro patas. Es una definición estrecha, pues hay mesas con tres patas e incluso con una sola.

Otro peligro es utilizar el definiens en el definiendum, porque en este caso se introduce el error de círculo vicioso en la definición, que ya antes se ha ejemplificado. También se les denomina errores tautológicos. Este error es poco común dentro de la matemática porque por lo general se usan equivalencias. Tratando de dar una idea de ese error en matemática, supongamos que se quiere definir qué es un número par usando el concepto de divisibilidad. Entonces decimos:

1ro. Los números pares son los números divisibles por dos.

2do. Un número es divisible por dos si es par.

- Ambigüedad en la redacción: el significado pierde claridad y precisión.

Ejemplo: Mediana de un triángulo es un segmento que va de un vértice a un lado opuesto y lo divide en dos partes iguales. Pero, ¿a quién divide, al lado o al triángulo? Es anfibológico.

- Incluir negaciones: este procedimiento posibilita la introducción de errores.

Ejemplo: Mediana es un segmento que va desde un vértice al lado opuesto y no es ni un lado, ni una bisectriz, ni una altura.

En este caso se han excluido las líneas notables usuales pero se incluye cualquier otro segmento trazado del vértice al lado opuesto. Ahora bien, en aquellos casos en que solo hay un número pequeño de posibilidades se pueden utilizar definiciones negativas. Por ejemplo, si se ha definido una sucesión convergente como la que tiene límite, entonces las divergentes son las que no son convergentes. Otro ejemplo sería definir rectas secantes (en el plano) como las que no son paralelas o viceversa, pues solo hay dos posibilidades. En el espacio esto no es posible, pues las rectas no paralelas pueden ser secantes o cruzarse. Sin embargo, se puede decir que dos rectas se cruzan si no se cortan ni son paralelas.

En resumen, en las definiciones por género próximo (definiens) y diferencia específica (definiendium), el definiens debe dar:

a. Un concepto subordinante del concepto a definir.

b. Propiedades que lo distinguen de otros conceptos también subordinados.

Por ejemplo: Un paralelogramo (definiendum) es un cuadrilátero (subordinante) con lados opuestos paralelos (observen que la condición de tener lados opuestos paralelos es lo que lo distingue de otros conceptos y está dentro del definiens).

En ellas es obligado que el definiens y el definiendum sean equivalentes, o sea el definiens no debe ser demasiado amplio ni demasiado estrecho.

1. La definición no debe contener círculo vicioso.
2. La redacción debe ser clara, precisa, sin ambigüedades.
3. En general, se deben evitar negaciones en la definición.

Dado que en una definición por género próximo y diferencia específica el definiendum y el definiens son equivalentes, se puede enunciar en forma de equivalencia, es decir, listando propiedades que equivalen a la precisión del significado, o sea que precisen el significado.

Veamos dos maneras de expresar lo mismo: en la primera solo se expresan propiedades y en la segunda ofrece además un concepto.

Ejemplo 1: Observen que en este ejemplo, al inicio solo se expresan propiedades que caracterizan al rectángulo, y después se expresa la definición por género próximo y diferencia específica.

Dos maneras diferentes de expresar lo mismo

- Solo se dan propiedades
  - Una figura es un **rectángulo** si y solo si:
    - ❑ Tiene cuatro lados.
    - ❑ Los lados opuestos son paralelos.
    - ❑ Los lados consecutivos son perpendiculares.
- Se da un concepto y propiedades
  - Un rectángulo es un **paralelogramo** en el cual **los lados consecutivos son perpendiculares.**

Comparemos esta última definición por género próximo y diferencia específica con la primera en la que se listan todas las propiedades del concepto que se define. Como se observa en la primera se precisa claramente todas las propiedades del objeto y en la segunda, hay un grupo de esas propiedades que quedan implícitas o involucradas en el "género próximo", que en este ejemplo es "paralelogramo".

En muchas ocasiones la equivalencia es una forma más conveniente de enunciar las definiciones que por género próximo y diferencia específica. Un ejemplo de ello para definir que la proporcionalidad inversa por género próximo y diferencia específica sería: "La proporcionalidad inversa es una relación entre dos variables en la que el producto de dichas variables permanece constante". El término *relación entre dos variables* es el concepto subordinante (género próximo) en este ejemplo y *el producto de dichas variables permanece constante*" es la diferencia específica.

Este mismo concepto definido por equivalencia, sería decir que x e y son inversamente proporcionales es lo mismo que decir $x \cdot y$ es constante. En síntesis, lo antes expresado con respecto a la definición de variables inversamente proporcionales muestra dos formas equivalentes de hacer la misma.

Las definiciones también pueden redactarse de forma implícita, cuando el significado del concepto se explica en un párrafo. Un ejemplo es la definición del concepto de unidad imaginaria (i) que se dice simplemente que "la unidad imaginaria es un número cuyo cuadrado es –1". También las definiciones de forma implícita pueden expresarse mediante un procedimiento inductivo o axiomático como es el caso de los axiomas de Peano. Por otro lado, la definición del "factorial de un número natural" por un procedimiento inductivo sería $n! = n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1$ en forma explícita y en forma implícita sería:

$$n! = \begin{cases} 1! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases} \quad \text{para todo } n \in N$$

Es necesario precisar que una definición puede aclarar el significado de un concepto o solo de un término que denota un concepto. Cuando la definición aclara el significado de un concepto se dice que esa definición es real. Por ejemplo: Cuadrado es una figura geométrica formada por cuatro lados iguales cuyas diagonales son congruentes. Existen también las definiciones nominales, cuando solo se aclara el significado de un término, es decir, se le pone nombre a ese significado. Un ejemplo de este tipo de definición es la siguiente: dos ángulos consecutivos a un lado de una recta se llaman adyacentes.

A modo de conclusión de lo relativo a las definiciones se puede plantear que las mismas dan una explicación completa del significado de un concepto, aclaran sus propiedades esenciales y las diferencian de otras parecidas. No obstante, no siempre es necesario dar una explicación tan abarcadora y pueden utilizarse explicaciones del significado semejantes a la definición. Esas otras formas menos abarcadoras son la caracterización, la descripción y la ejemplificación.

En la caracterización se explican los rasgos esenciales del concepto pero no se atiende a su diferenciación de otros parecidos, en una descripción se dan propiedades externas que permiten diferenciar el concepto, pero no se dan sus propiedades esenciales. No obstante, a veces, se combinan ambos procedimientos, o sea la descripción y la caracterización. Por último, la ejemplificación que es la explicación del significado señalando un ejemplo, es decir, un objeto que pertenece a la extensión del concepto. A veces la explicación se hace describiendo el objeto, pero otras se hace señalando un objeto físico de la extensión del concepto. Este tipo de explicación de denomina explicación "ostensiva". No obstante hay términos indefinibles que son aquellos términos simples que no se pueden explicar mediante una definición y por eso se definen ostensivamente; este es el caso de los colores o los sabores (dulce, amargo). Esto puede ser criticado porque puede ser interpretado de diversos modos, aunque el contexto resuelve el problema y trata de explicar esos términos con definiciones, lo que conduce inevitablemente a círculos viciosos.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M. (1999). *Lógica* y *Procedimientos Lógicos*. (Pág. 2 a 9). Material Impreso. La Habana. Editorial del Ministerio de Educación.

Campistrous, L. (1994). *Lógica*. (Pág. 3 a 9).Material Impreso. La Habana. Editorial del Ministerio de Educación.

Copi, I. (1967). *Introducción a La Lógica*. Buenos Aires. Editorial Universitaria.

Fingermann, G. (1990). *Lógica y Teoría del Conocimiento*. Buenos Aires. Editorial El Ateneo

Rizo, C. y otros. (1991). *Matemática 6*. (pág. 147 a 214). La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Editorial Pueblo y Educación.

Rizo, C. y otros. (l990). *Matemática 5*. (pág. 165 a 196). La Habana. Editorial Pueblo y Educación.