LAS FILIACIONES Y RUPTURAS EPISTEMOLÓGICAS ENTRE LA PROPORCIONALIDAD Y LA LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, crondero6@hotmail.com, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. Se han identificado algunas de las filiaciones y rupturas epistemológicas entre las nociones de proporcionalidad y linealidad, lo cual ha permitido hacer un rescate de algunos de sus significados. Una filiación epistemológica es un cúmulo de atributos conceptuales que se vinculan entre las nociones y sus significados, y una ruptura epistemológica es la separación que se va dando entre las nociones, debido a la evolución propia de una de ellas. Tal rescate permite aportar elementos en la estructuración de un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar.

Palabras clave: linealidad, proporcionalidad, filiaciones, rupturas, didáctica

Abstract. It has been identified some affiliations and epistemological ruptures between the notions of proportionality and linearity, which has allowed a recovery of some of its meanings. A epistemological affiliation is a cluster of attributes linked conceptual notions and their meanings, and an epistemological rupture is the separation due the own development of one of them. Such recovery can provide some aspects in shaping a articulated and structured didactic discourse in school mathematics.

Key words: linearity, proportionality, affiliations, ruptures, didactic

Introducción

Se tiene referencia de rupturas epistemológicas que han sido sustentadas en el desarrollo histórico de las ideas matemáticas. Para este trabajo es de interés identificar las filiaciones y rupturas epistemológicas entre las nociones de proporcionalidad y *linealidad*, de tal manera que ello permita realizar un rescate de algunos de sus significados que incidan en el diseño de situaciones de aprendizaje.

En cuanto a los aspectos metodológicos que se han empleado, se parte de la detección de la problemática en la Didáctica de saberes vinculados con las nociones de proporcionalidad y *linealidad*, y se asocian con sus orígenes epistemológicos y las causas socioculturales de su emergencia, dando pauta a la identificación de sus filiaciones y rupturas. Bajo el entendido que una filiación epistemológica es un cúmulo de atributos conceptuales que se vinculan entre las nociones y sus significados, su identificación y empleo representan un elemento metodológico a tomarse en cuenta en el proceso del rescate de las ideas matemáticas en la historia.

Por otra parte, una ruptura epistemológica es la separación que se va dando entre las nociones, debido a la evolución propia de una de ellas que se manifiesta en la estructuración de sus significados inherentes (Acosta, 2011).

Para un mejor análisis de las filiaciones y rupturas, (Chevallard, 1997) se delimitaron cuatro escenarios históricos (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008), aunque estas etapas no son definitivas ni exhaustivas, sí son representativas de ciertas características epistemológicas que le dan peculiaridad a cada una de las mismas.

El primer escenario se remonta a las culturas ancestrales egipcia, china y babilónica, donde el cobro de impuestos se calculaba a través de la proporción directa respecto de los bienes del contribuyente. Además emplearon la progresión aritmética para cálculos similares de lo que ahora llamamos interés simple. En el segundo, se toma como referencia principal a autores clásicos de la cultura griega, particularmente Arquímedes, quienes emplearon a la noción de proporcionalidad como elemento epistemológico de construcción de muchos de sus resultados en geometría y para resolver problemas cotidianos de cálculo.

El tercero, se caracteriza por ser una época en donde se presenta un enlace conceptual entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad, siendo Fermat y Descartes quienes dieron pleno sentido a los trabajos de Apolonio acerca de lugares geométricos.

El último escenario, parte del origen del Álgebra Lineal, cuyo sustento epistemológico está dado por la noción de linealidad, la cual genera conceptos tales como: dependencia e independencia lineal, rango, entre otros.

Algunas filiaciones y rupturas epistemológico-históricas y su articulación con la didáctica actual

Al tomar en cuenta lo que comenta Artigue (1998) respecto a las dificultades ligadas a la necesaria ruptura que se requiere dar con respecto al pensamiento algebraico, cuando se aborda el campo conceptual del Análisis elemental (Cálculo). Es posible tomar esta consideración en referencia a la necesaria ruptura del pensamiento proporcional, cuando se tratan problemas relacionados con proporción inversa, y también, posteriormente, cuando se formaliza la noción de linealidad en el Álgebra lineal.

En las culturas ancestrales mencionadas se empleó la proporción directa, a través de una expresión de proporcionalidad de interés simple, de tipo discreto, para el cálculo de impuestos, que en sintaxis moderna se escribe:

$$I=C_0\,it$$

Donde: I representa al interés simple, C_0 es el monto total gravable, i la tasa de interés, y t el periodo de tiempo. La proporción directa está manifiesta en que el impuesto por cobrar aumenta, si aumenta el periodo de tiempo, y que disminuye el impuesto, si el lapso de tiempo es más corto, ya que el capital inicial es constante:

$$I \alpha C_0 t$$

Entonces se aprecia que la tasa de interés *i* es la constante de proporcionalidad.

En la didáctica moderna, a pesar de que sí se aborda, no se hacen evidentes las filiaciones conceptuales entre la proporción directa y los hechos socioculturales del cobro de impuestos en la antigüedad, e incluso en la modernidad, aunque a veces los pagos al fisco están calculados a través de expresiones de interés compuesto.

A su vez, tampoco en el escenario escolar se enfatizan tales filiaciones epistemológicas, cuando se trata el modelo más completo, para el cálculo de un capital *C* que está variando cuando gana o pierde un interés que se considera constante en cada uno de los periodos:

$$C=C_0\,(1 \pm it),$$

donde: t = 1, 2, 3,…n

Esta expresión, que es obtenida de la proporcionalidad, ya es una forma lineal, aunque modelada en un fenómeno discreto (ya que en esa época no se podría conceptuar de otra manera), como lo habría conceptualizado posteriormente Descartes para el caso continuo. Otra importante aportación de este escenario es el surgimiento explícito de la referencia a una constante de proporcionalidad, dada por una tasa impositiva, que en otros momentos históricos evolucionará hacia una tasa de variación constante. Dicho de otro modo en el proceso de evolución de la noción de proporcionalidad hacia la noción de *linealidad*, ésta característica epistémica no se pierde a lo largo del tiempo.

En relación al segundo escenario histórico, los griegos teorizaron acerca de de la proporción directa, en particular, hacia 370 a. c. Eudoxio de Cnido (408 – 355) (Hofmann, 2002), define indirectamente a la proporción directa como la igualdad de dos razones:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Además por otra parte Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, en tal caso, afirma que el volumen de la esfera es directamente proporcional al diámetro elevado al cubo.

$$V \alpha d^3$$

En cuanto a la relación entre las dos cantidades, el volumen y el cubo del diámetro, existe la proporción directa, en el sentido de que si aumenta el cubo del diámetro, también hay un incremento del volumen. Es de resaltarse que Arquímedes contribuye a llevar a la proporcionalidad a un nuevo estatus al realizar una "comparación" entre cantidades de igual dimensión, en tal caso el volumen con el diámetro al cubo, el área con el radio al cuadrado, el volumen de una esfera, con el radio al cubo.

Estos hechos anteriores, generalmente no se toman en cuenta en las prácticas docentes cotidianas, esto es, no hay una filiación explícita entre la noción de proporción directa y los conceptos de las dimensiones espaciales de las cantidades geométricas que empleó Arquímedes al hacer sus contribuciones.

La noción de proporcionalidad no aparece de manera explícita cuando Descartes propone a la línea recta como lugar geométrico, determinando la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x. Esto representa una ruptura epistemológica con respecto a los trabajos antiguos de Apolonio sobre lugares geométricos. Descartes representa a la recta que pasa por el origen, de la forma:

$$b\,x = a\,y,$$

y considera

$$a\,x + b\,y = c$$

como la ecuación de una recta en su forma general. Pero de manera implícita está presente la proporción directa, en el caso de $c = 0$, $b \neq 0$ y $a \neq 0$, lo cual es una filiación epistemológica entre la proporcionalidad y la recta. En cambio si $c \neq 0$, $b \neq 0$, implica una ruptura del mismo tipo. Sin embargo en ambos casos si está presente la razón de cambio constante.

Este hecho histórico de trascendencia epistemológica, no se lleva al escenario didáctico de los cursos de matemáticas de secundaria, ni tampoco de Geometría analítica en el bachillerato. Por lo cual se desprenden rupturas cognitivas, al perderse la filiación conceptual de la recta con la proporción directa, ya que no se hace evidente la razón de cambio constante como característica inherente a la recta misma.

Es de resaltar que en expresiones de proporcionalidad directa como:

$$A \; \alpha \; B,$$

que se usaban en las culturas antiguas como la griega, babilónica y egipcia, la constante de proporcionalidad k, como aparece en la siguiente expresión:

$$A = k\,B,$$

surgió a partir de la comparación entre números (*A* y *B*) que también podrían estar representando segmentos, ya que en ese entonces aun no se concebía a la variable como está definida en la actualidad. Por otra parte en la ecuación de la recta que pasa por el origen, cuya expresión es:

$$y=k\,x$$

la constante de proporcionalidad conlleva a una relación entre variables, que pueden tomar valores continuos o discretos.

En la didáctica actual, a menudo no se resalta la diferencia conceptual entre "las dos constantes de proporcionalidad", ya que la primera, es referida a la comparación entre "cantidades dadas", y la segunda entre "cantidades variables", de hay su denominación como tasa de variación constante. Por otra parte sus respectivas representaciones son distintas, para la primera proporción, sus elementos se pueden ubicar en la recta numérica, en cambio la proporción entre variables, tiene asociada una gráfica de una recta que pasa por el origen.

Esta filiación epistemológica tampoco se explicita de manera enfática en el escenario escolar. Cuando en un curso de Física de bachillerato se estudia la segunda ley de Newton, puede verse como una relación proporcional entre dos fuerzas horizontales distintas y las respectivas aceleraciones que producen, guardando entre ellas una relación de la forma:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}$$

Esta expresión puede ser reescrita como:

$$F = m\,a$$

Donde la masa *m* adquiere el papel de constante de proporcionalidad, con una connotación distinta, por la naturaleza misma de las variables mecánicas.

Es en el tercer escenario donde se empiezan a dar las condiciones para la ruptura epistemológica entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad, ya que a partir del estudio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, es como se fue teorizando y dándole forma incipiente a los conceptos del Álgebra lineal (Dorier, 2000).

A mediados del siglo XIX, ya en el cuarto escenario histórico aparecen de manera preponderante conceptos, tales como dependencia lineal entre vectores definidos en *R*. En términos didácticos no se hace evidente la filiación epistemológica de la dependencia lineal con la proporción directa, ya que dados dos vectores v_1 y v_2 definidos en el espacio vectorial *V*. Partiendo de la consideración de que:

$$v_2 = cv_1,$$

para un escalar c diferente de cero, o sea dos vectores colineales, es evidente que

$$c_1 v_1 - c_2 v_2 = 0, \text{ donde } c = \frac{c_1}{c_2}.$$

que implica que dichos vectores son linealmente dependientes. Entonces existen constantes c_1 y c_2 tal que $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$. Por lo que si $c_1 \neq 0$ y despejando v_1 se tiene

$$v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2$$

El decir que v_1 es múltiplo escalar de v_2 implica una filiación epistemológica en cuyo caso la "constante de proporcionalidad" toma el estatus de razón de cambio constante entre vectores:

$$k = -\frac{c_2}{c_1}, \text{ por lo que } v_1 = k\, v_2$$

Aunque históricamente la conceptualización de dependencia e independencia lineal surge de la relación que hay entre las ecuaciones en un sistema, esto proviene del hecho de que una ecuación sea múltiplo de otra, o no lo sea (Dorier, 2000), sin embargo existe una filiación epistemológica entre lo anteriormente dicho y la proporción directa, lo cual debiera jugar un papel determinado en la didáctica. Esto es, en parte, al menos lo que le daría un significado a la definición formal de dependencia lineal (Grossman, 1996):

Dependencia e independencia lineal Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes.

[….], $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si la ecuación

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$ se cumple sólo para $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

Sin embargo, para la generalización de la dependencia lineal entre n vectores, se requiere hacer una ruptura epistemológica con la proporcionalidad para "dar paso" a la construcción más amplia de los conceptos de independencia y dependencia lineal. Ello es parte de la propia evolución de la noción de linealidad, lo cual da evidencia del estatus metamatemático que tiene, ya que es un elemento de información y conocimiento acerca del funcionamiento en general del aprendizaje de las matemáticas.

Desde la perspectiva teórica de las filiaciones y rupturas epistemológicas entre las nociones de proporcionalidad y linealidad, se rescata una *idea germinal*, (Cantoral, 2001) de la *linealidad*., la *ratio mutabilitas constant* –razón de cambio constante- (Acosta, 2011).

Conclusiones

El análisis aquí desarrollado, deja entrever varias filiaciones y rupturas epistemológicas entre determinados significados de las nociones de proporcionalidad y linealidad, que tiene su trascendencia en la didáctica.

Hay necesidad de hacer explícitas las filiaciones y rupturas epistemológicas de la *linealidad* en la didáctica vigente, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada. Esto significa, primero identificarlas, después darles seguimiento, y posteriormente dar alternativas sobre su puesta en escena en ambiente escolar.

La linealidad está encajada en los procesos de proporcionalidad directa, y esto se palpa en resultados ancestrales y ha representado un elemento de análisis y descubrimiento.

Se han mostrado los distintos estatus epistemológicos que tiene la constante de proporcionalidad durante su evolución conceptual, lo cual permite desde una comparación entre: cantidades dadas (adimensionales y dimensionales), números reales, variables y vectores, entre otros.

Se considera a la constante de proporcionalidad, como un antecedente conceptual que va a evolucionar en la *ratio mutabilitas constant*, la cual se ha propuesto como la idea germinal que denota a la tasa de variación constante.

A partir de la visión de esta investigación se valora a la noción de linealidad como un ingrediente básico en la construcción del saber matemático. Tal noción cumple un cometido de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada.

En el caso de dos vectores hay una clara filiación entre la noción de proporcionalidad con la dependencia lineal, aunque cabe aclarar que cuando se hace referencia a tres o más vectores, se involucran nuevos conceptos vinculados a los espacios vectoriales, que le van dando sustento a la dependencia lineal y al mismo tiempo contribuyen a la construcción de la noción de linealidad.

A través del rescate epistemológico de las filiaciones y rupturas, entre los significados de las nociones de proporcionalidad y linealidad, se posibilita el estructurar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

Acosta, J. (2011). *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008) Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM* (pp. 301-308). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2010) La resignificación de la noción de linealidad. *ALME 23* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Chevallard, Y. (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial* Aique. Buenos Aires: Argentina.

Dorier, J. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Grossman, S. (1996). *Álgebra lineal.* (5ª ed.). México: Editorial Mc Graw Hill

Hofmann, J. (2002). *Historia de la Matemática.* México: Editorial Limusa.