¿QUÉ COMPRENDEN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LOS ALUMNOS AL FINALIZAR LA ESCUELA SECUNDARIA?

Marcel Pochulu, Raquel Abrate, Ivana Gabetta, Silvina Sierra
Universidad Nacional de Villa María Argentina
marcelpochulu@hotmail.com

Resumen. Este trabajo tuvo por objetivo determinar lo que han comprendido sobre ecuaciones algebraicas los alumnos, al finalizar la escuela secundaria e ingresar en la universidad. Para ello, analizamos las producciones escritas de 55 alumnos aspirantes a ingresar a una carrera de nivel universitario, posicionándonos en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, como marco teórico y metodológico de la Didáctica de la Matemática. Analizar la comprensión que tienen los alumnos sobre las ecuaciones, nos llevó a determinar si reconocen el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, aplican y recuerdan (implícitamente en la mayoría de los casos) los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y utilizan lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones. Como resultado final, obtuvimos una aproximación a la configuración cognitiva de cada estudiante, lo que permitió valorar la comprensión que tienen sobre el objeto matemático en cuestión.

Palabras clave: ecuaciones, comprensión, evaluación diagnóstica en matemática, enfoque ontosemiótico

Abstract. This work had as goal to establish what the students have learnt about algebraic equations after finishing high school and getting into college. For this reason, we have analyzed written productions of about 55 applicant students to join a college career, finding the position of the Onto-Semiotic Approach to Mathematics Education, as theoretical and methodical framework in the Teaching of Mathematics. After finding out as much as possible about the students´ understanding in equations, let us determine if they are able to recognize in process of completion of the mathematical object; if they can apply and remember (in most cases implied) concepts, properties and procedures required to carry out successful tasks. And if they have the chance to use suitable language and arguments in their explanations. As the final outcome, we approached the cognitive features of each student and it allowed us to regard students´ comprehension about the mathematical object in question.

Key words: equations, understanding, diagnostic mathematics assessment, onto-semiotic approach

Introducción

Cuando los alumnos finalizan la escuela secundaria y siguen estudios superiores en la universidad, donde la Matemática está presente en el diseño curricular de la carrera escogida, es frecuente que atraviesen por cursos de admisión o de nivelación, los cuales suelen tener como objetivo determinar lo que saben sobre ciertos temas considerados básicos en la disciplina. Habitualmente se les administra evaluaciones donde se presentan actividades y el éxito o fracaso obtenido, cuantificado en una calificación, termina siendo un indicador de lo que “saben” del tema. Esta calificación, puesta en el mejor de los casos con absoluta justicia, puede indicar que el alumno sabe de ciertos temas, pero no cuánto sabe de él, cómo lo sabe o por qué sabe lo que sabe.

Determinar cuánto sabe un alumno de un determinado tema y cómo lo sabe, nos remite a valorar la comprensión que tiene de un objeto matemático. En este sentido, en Rodríguez (2010) se expresa, como producto de un consenso entre especialistas sobre aspectos cognitivos referidos a la enseñanza de la Matemática, que:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (p. 122)

Bajo esta concepción, nos hemos propuesto dar respuesta a la siguiente pregunta directriz de nuestra investigación: ¿Qué han comprendido sobre ecuaciones algebraicas los alumnos al ingresar a la Universidad? Como contexto de estudio hemos considerado las prácticas operativas y discursivas realizadas por alumnos aspirantes a ingresar a una carrera de ingeniería de la Universidad Nacional de Villa María (UNVM), de Argentina.

Como objetivo de trabajo nos propusimos valorar lo que han comprendido sobre ecuaciones algebraicas con una incógnita (lineales, cuadráticas, fracciones racionales y las que involucran radicales) los alumnos al ingresar a la universidad, con la finalidad de guiar a nuestros estudiantes en el aprendizaje sobre este objeto matemático en particular. No hemos considerado las ecuaciones trascendentes, pues no fueron objeto de estudio en el nivel secundario.

Marco teórico

El trabajo se encuentra encuadrado dentro de la Teoría de Funciones Semióticas, una de las herramientas provistas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática.

El EOS entiende el significado de un objeto matemático en términos de lo que se puede hacer con él en una práctica matemática. Esta correspondencia se realiza a través de una función semiótica que tiene por antecedente a un objeto matemático (o la expresión que puede designarlo), y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones-problemas. En consecuencia, el significado de un objeto, considerado como "expresión" en una función semiótica, será el "contenido" de esta función semiótica, y ha sido establecido por un sujeto siguiendo una regla o criterio de correspondencia.

Por otra parte, el EOS concibe a la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (Godino 2000, Font 2001), pues sostiene que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. A su vez, Godino (2000) expresa que se puede entender a la comprensión en términos de funciones semióticas. Cuando un sujeto realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto matemático:

- *Lenguaje*: es entendido en este marco teórico como los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., los que se presentan, a su vez, en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas*: son las actividades, tareas o ejercicios, tanto extra-matemáticas como intra-matemáticas.
- *Conceptos-definición*: corresponden a aquellas construcciones o elementos que son introducidos mediante definiciones o descripciones de un objeto.
- *Proposiciones*: enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.
- *Procedimientos*: comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.
- *Argumentos*: comprenden enunciados y razonamientos usados para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema, los cuales pueden ser deductivos o de otro tipo.

A su vez, estos seis objetos primarios se organizan en entidades más complejas para constituir sistemas conceptuales y teorías. Se relacionan entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático. Estas configuraciones pueden ser epistémicas si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994). Más específicamente, la Teoría de las Funciones Semióticas establece que el significado de un objeto matemático es el par "Configuración epistémica/prácticas que posibilita", siendo la definición (explícita o implícita) del concepto matemático solo uno de los componentes de la configuración epistémica.

Metodología de la investigación

Hemos analizado las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) que efectuaron 55 alumnos aspirantes a ingresar a una carrera de ingeniería, a quienes se les propuso la realización de un conjunto de tareas referidas a ecuaciones. Posteriormente seleccionamos los que habitualmente se considerarían "aprobados" por haber logrado resolver correctamente el 50% o más de las consignas planteadas (13 alumnos sobre el total de 55). De estos trabajos, examinamos las producciones enfocándonos en el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes ante las situaciones–problemas planteadas. Finalmente, intentamos establecer la relación entre este conglomerado de prácticas que los alumnos son capaces de realizar con el objeto matemático en cuestión (ecuaciones) y el significado que pudieron construir acerca del mismo.

Analizar la comprensión que tienen los alumnos sobre las ecuaciones, posicionados en el EOS, nos llevó a determinar si reconocen el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, si aplican y recuerdan (implícitamente en la mayoría de los casos) los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y si utilizan lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones.

Para ello, llevamos a cabo actos de semiosis con la intención de establecer una correspondencia entre objetos matemáticos (expresión-contenido) a través de una función semiótica, para la cual se ha seguido una regla o criterio de correlación dada por nuestra experiencia como docentes e investigadores. Como resultado final obtuvimos una aproximación a la configuración cognitiva de los alumnos, lo que permitió valorar la comprensión que tienen sobre el objeto matemático ecuaciones, al compararla con una configuración epistémica de referencia. A su vez, con la finalidad de efectuar un análisis profundo de la comprensión que se tiene de ecuaciones, realizamos algunas entrevistas clínicas para ahondar aún más en la problemática en cuestión.

Algunos resultados y discusión

Para cada alumno se realizó una configuración cognitiva y se la comparó con la configuración epistémica construida para el objeto matemático ecuaciones. Es de destacar que si consideramos la unión de todas las configuraciones cognitivas, encontramos todos los elementos de la configuración epistémica. Esto es, el conocimiento se halla distribuido en los estudiantes, de tal forma que ningún alumno sabe acabadamente del tema, pero todos los alumnos saben sobre algo.

Transcribimos a continuación fragmentos de las evaluaciones de los alumnos con las interpretaciones realizadas para conformar cada configuración cognitiva. Las interpretaciones son realizadas teniendo en cuenta los 6 objetos primarios que considera el EOS que componen una configuración cognitiva o epistémica: situación problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje. Sólo expondremos algunas actividades que consideramos representativas, en tanto se rescatan algunos significados construidos por los alumnos en torno a las ecuaciones.

La alumna A1 (figura 1) aplica en forma correcta la propiedad distributiva y resuelve adecuadamente la ecuación utilizando una fórmula (procedimiento). Sin embargo, no advierte que si un producto es nulo, algún factor o todos deben serlo (propiedad), con lo que le hubieran resultado mucho más sencillos los cálculos. Tampoco verifica (procedimiento) que el valor encontrado es la solución (concepto) de la ecuación dada.

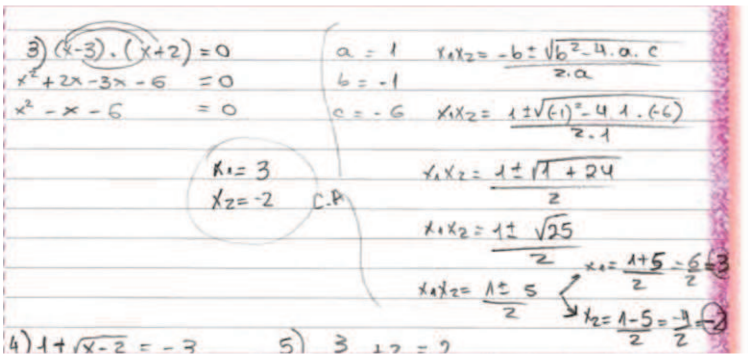


Figura 1. Resolución de la actividad 3 de la alumna A1

El alumno A2 (figura 2) aplica correctamente la transposición de términos (procedimiento) para resolver las ecuaciones, reconoce propiedades de la radicación y opera (procedimiento) adecuadamente con números enteros, a pesar de indicar de manera incorrecta el cuadrado de -4. En la ecuación del ítem 5, no advierte que si una fracción es igual a cero, entonces debe serlo el numerador (propiedad). Continúa operando sin advertir la propiedad de elemento absorbente del cero en la multiplicación lo que lo lleva a obtener un cociente con divisor cero (concepto) que ignora, y termina incorrectamente la resolución. En ambas ecuaciones asume que el resultado obtenido con el procedimiento empleado ya es una solución (concepto) de la misma, y no verifica ni expresa el conjunto solución.

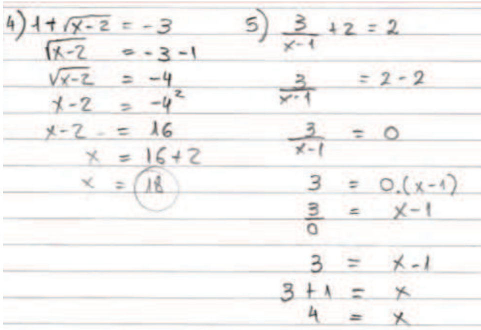


Figura 2. Resolución de las actividades 4 y 5 del alumno A2

Algo similar ocurre con el alumno A3 (figura 3) que, ante la misma ecuación (actividad 5), resuelve correctamente (procedimiento) y concluye que la última expresión obtenida no es una igualdad (concepto) pero nada dice acerca de la solución de dicha ecuación.

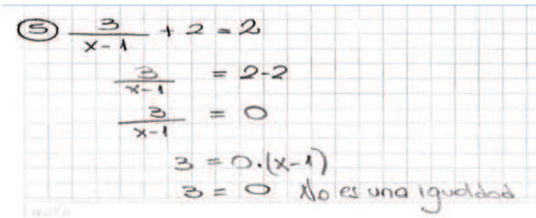


Figura 3. Resolución de la actividad 5 del alumno A3

El alumno A4 (figura 4) aplicó la propiedad distributiva para encontrar el cuadrado de un binomio (concepto). Si bien el trinomio cuadrado perfecto que obtiene es correcto, interpreta que la expresión obtenida es una ecuación de segundo grado (concepto) y busca el conjunto solución aplicando una fórmula (procedimiento), equivocándose en el proceso y obteniendo un único valor para la incógnita, omitiendo su multiplicidad (concepto). No obstante, el valor que obtiene al final de dicho procedimiento no es tratado como solución (concepto) de una ecuación puesto que en ningún momento verifica que efectivamente satisface la "supuesta" ecuación.

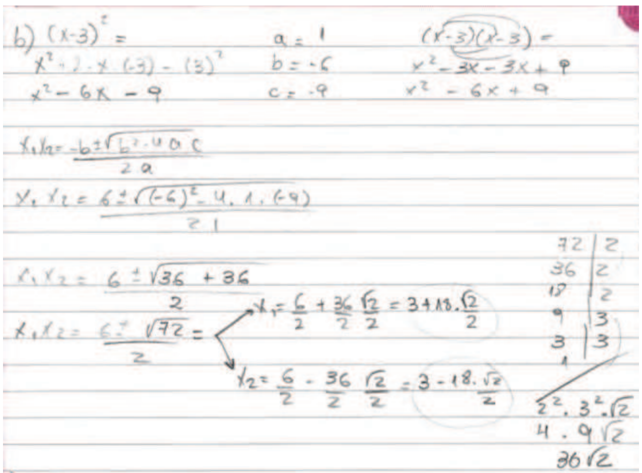


Figura 4. Resolución de la actividad 8 del alumno A4

En la entrevista con la alumna A5 (figura 5) se advierte que aplica en forma correcta la transposición de términos (procedimiento) para resolver ambas ecuaciones, reconoce propiedades de la radicación y opera (procedimiento) adecuadamente con números enteros. Sin embargo, en su argumentación, utiliza la expresión "término" (concepto) como sinónimo de "miembro" de una ecuación (concepto). A su vez, aparecen elementos lingüísticos incorrectos, como "*radicandos de un término*", "*números independientes*" y "*signo opuesto, la suma*". En este último caso, se pone de manifiesto que no advierte la diferencia entre "signo" y "operación" (conceptos). Asimismo, alude a proposiciones que son enunciadas en términos de metáforas operacionales, según Abrate, Pochulu y Font (2009, p. 124): "*pasamos hacia el otro término con la operación inversa*", "*pasamos la raíz como exponente cuadrado", "quede mi variable sola en compañía de su coeficiente", "Si está multiplicando lo pasamos dividiendo o viceversa",* entre otras.

La alumna A6 (figura 6) resuelve correctamente la situación problemática con datos numéricos que se le presenta en primera instancia; sin embargo, no es capaz de resolver la situación que se le presenta a continuación, con datos representados por símbolos, cuya estructura es idéntica a la primera.

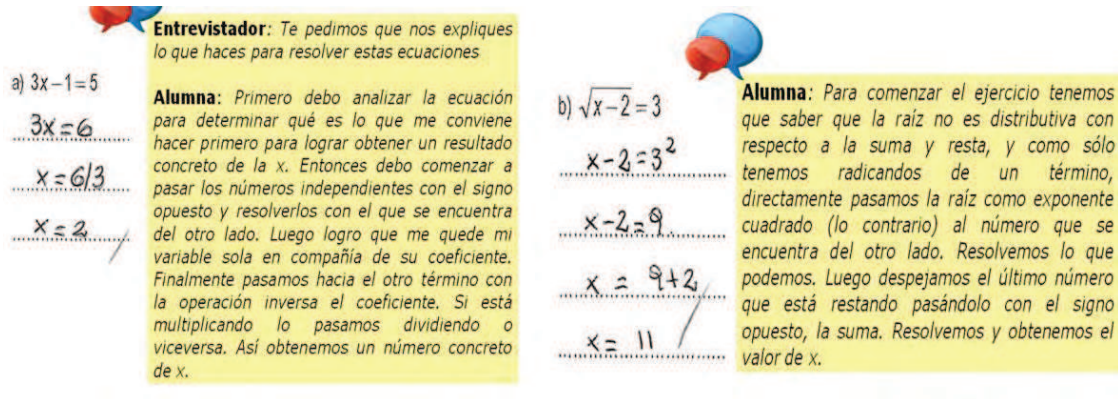


Figura 5. Entrevista con la alumna A5

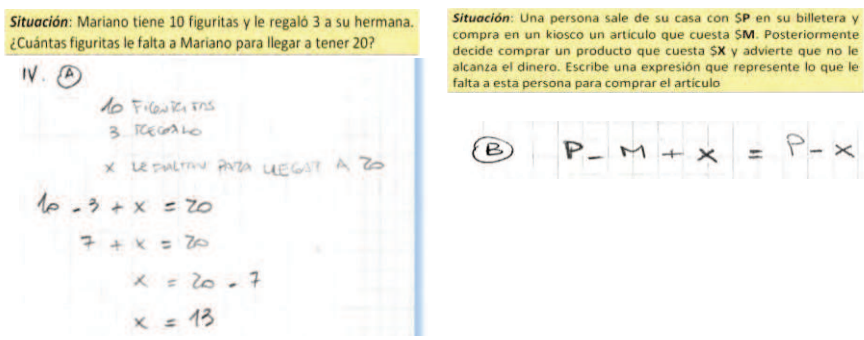
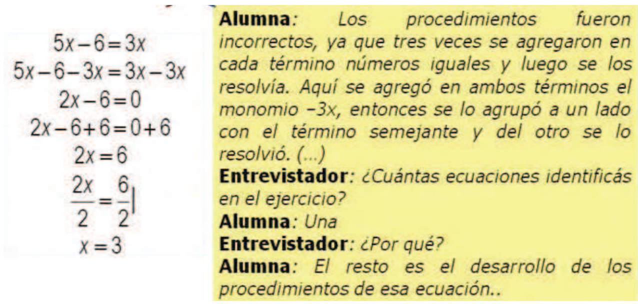


Figura 6. Resolución de la actividad 9 de la alumna A6

En la entrevista con la alumna A7 (figura 7) interpretamos que distingue objetos matemáticos como "monomio" y "término semejante" (conceptos) pero no el de "miembro de una ecuación", a quien designa como "término". No conoce las propiedades de la igualdad, razón por la cual juzga de incorrectos los procedimientos utilizados a pesar de dar por válida la solución (concepto) que se indicaba en el ejercicio. A su vez, desconoce el concepto de ecuación equivalente y por este motivo sólo advierte la presencia de una sola ecuación (concepto).



$$5x-6=3x$$
$$5x-6-3x=3x-3x$$
$$2x-6=0$$
$$2x-6+6=0+6$$
$$2x=6$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

Alumna: *Los procedimientos fueron incorrectos, ya que tres veces se agregaron en cada término números iguales y luego se los resolvía. Aquí se agregó en ambos términos el monomio −3x, entonces se lo agrupó a un lado con el término semejante y del otro se lo resolvió. (...)*
Entrevistador: *¿Cuántas ecuaciones identificás en el ejercicio?*
Alumna: *Una*
Entrevistador: *¿Por qué?*
Alumna: *El resto es el desarrollo de los procedimientos de esa ecuación..*

Figura 7. Entrevista con la alumna A7

A modo de conclusiones

Para cerrar nuestro trabajo, retomamos nuestra pregunta inicial ¿qué saben los alumnos sobre ecuaciones algebraicas al ingresar a la universidad? Como respuesta a ella, podemos decir que los alumnos: (a) No distinguieron, en muchos casos, el campo de problemas de las ecuaciones, dadas en contextos intra o extramatemáticos; (b) No tienen claros los conceptos de ecuación, solución, miembros de una ecuación, términos de una ecuación, ecuación equivalente, entre otros; (c) Desconocen las propiedades asociadas a la resolución de ecuaciones (propiedades de la igualdad, producto de factores iguales a cero, el cero como absorbente de la multiplicación, entre otras); (d) Utilizan como único procedimiento de resolución de ecuaciones la transposición de términos, y en muchos casos, con errores en su aplicación; (e) La mayoría de los argumentos no han sido adecuados e introducen elementos lingüísticos que no se encontrarían en una configuración epistémica asociada a ecuaciones.

Esta valoración nos lleva a decir que los estudiantes no tienen una comprensión cabal del objeto matemático ecuaciones, en tanto no han podido utilizarlo de manera competente en diferentes prácticas. Esto guarda relación con el hecho de que la configuración cognitiva referida a ecuaciones de cada alumno evaluado es incompleta -en tanto no domina la totalidad del sistema de prácticas relacionadas con este objeto matemático-. No obstante, rescatando lo que cada alumno ha comprendido sobre ecuaciones, se logra estructurar la configuración epistémica deseada y utilizada como referencial para el estudio. Esto nos lleva a concluir que si se organizaran procesos de enseñanza y aprendizaje cuidadosamente planificados, se mejoraría la comprensión global que los estudiantes lograrían tener sobre las ecuaciones.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Font, V. (2009). Metáforas en contextos de resolución de ecuaciones. En M. Pochulu, R. Abrate y S. Visokolskis (Eds.), *La Metáfora en la Educación: descripción e implicaciones* (pp.95-126), Villa María: EDUVIM.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competencia. *Biaix 19*, 33-36.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO 25*, 77-87.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3)*, 325-355.

Rodríguez, M. (Coord.). (2010). *Proyecto de mejora para la formación docente inicial de profesores para el nivel secundario – Área Matemática.* Buenos Aires: Instituto Nacional de Formación Docente. Recuperado el 1 de marzo de 2011 de http://www.cin.edu.ar/download.php?file=proyecto.pdf