RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN SIN EL USO DE LÍMITES Y DERIVADAS. INTERPRETACIONES MÉDICAS

Luis Alberto Escalona Fernández, José Ramón Velázquez Codina
Universidad de Ciencias Médicas Holguín Cuba
albert@ucm.hlg.sld.cu

Resumen. Se desarrollaron algoritmos matemáticos para determinar la monotonía, extremos locales, intervalos de convexidad y puntos de inflexión de funciones, las posibilidades reales de trabajo en la interpretación del modelo matemático relaciona los diagnósticos y terapéuticas en la resolución de problemas de salud a enfrentar por el Médico General. La novedad científica desde el punto de vista didáctico, consiste en la resolución de problemas de optimización sin el uso de límites y derivadas. La utilización de las Tecnologías Informáticas permite a estudiantes y profesores incontables posibilidades.

Palabras clave: algoritmos, didáctico, extremos, funciones

Abstract. In this paper; mathematical algorithms have been developed to determine the monotony, local extremes, intervals of convexity and points of inflection of the real job opportunities in the interpretation of the mathematical model relates the diagnostic and therapeutic in solving health problems to be faced by the General Medical. The new scientific evidence from the educational point of view consists in solving optimization problems without the use of limits and derivatives. The use of Information Technology allows students and teachers of uncountable possibilities.

Key words: algorithms, didactic, extreme functions

Introducción

Algunos publicaciones sobre esta temática corresponden a los siguientes autores (Stewart, 1999), (Karelin, Rondero y Tarasenko, 2007), (Font, 2009). En esta investigación se presentan aspectos didácticos metodológicos más relevantes para el logro de la comprensión, explicación e interpretación de fenómenos de la realidad médica, los cuales están relacionados con la educación profesional de estudiantes de la carrera de Medicina, estos se declaran en el Plan de Estudio actual, expresados en 220 problemas de salud a enfrentar por el Médico General; en estrecho vinculo se identifican los ejes interdisciplinarios para la realización de un correcto análisis de estos problemas, en los cuales es posible formular el diagnóstico y la terapéutica exigida dadas las circunstancias particulares de cada paciente.

El método constituye una herramienta matemática sencilla para la construcción de la curva de la función, según sus aspectos topológicos más relevantes.

Desarrollo

Se proponen los siguientes algoritmos matemáticos.

Algoritmo (I) para la determinación de extremos de funciones. Dada la función $y = f(x)$.

1. Se plantean las desigualdades (1) y (2) para analizar respectivamente la existencia de máximo y mínimo en sentido estricto.

$(1)\ f(x_0+(\pm\delta)-f(x_0)\leq 0,\ (2)\ f(x_0+(\pm\delta)-f(x_0)\geq 0$ (Escalona y Velázquez, 2007).

2. Se realizan operaciones aritméticas y operaciones de comparación, respectivamente en la expresión (1) o (2) hasta agrupar los sumandos convenientemente en función de δ y sus potencias (la utilización de un programa informático profesional ofrece ayuda en los cálculos).

3. Se anula (se iguala a cero) el coeficiente de δ, se determinan los valores de x_0 (se recomienda el uso de un programa informático profesional para la realización de estos los cálculos).

4. Se concluye según (1) o (2), si es máximo o mínimo respectivamente. En caso de que no se verifiquen (1) o (2), entonces no posee extremos.

5. Los valores x_0 se evalúan en la función. Se indican las coordenadas del extremo.

Primero: este Algoritmo I se emplea en la resolución de problemas de optimización.

Segundo: la visualización y el pensamiento matemático y científico juegan un papel protagónico en la verificación de los pasos del algoritmo. Contraejemplo. Determinar si la siguiente función tiene extremos locales $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$. Se aplica el algoritmo.

Se plantea la diferencia se realiza la reducción:

$$f(x_0+(\pm\delta)-f(x_0)=(x_0\pm\delta)^3-6(x_0\pm\delta)^2+12(x_0\pm\delta)-x_0{}^3+6x_0{}^2-12x_0$$
$$(3x_0{}^2-12x_0+12)(\pm\delta)+(3x_0-6)(\pm\delta)^2-(\pm\delta)^3$$

Se anula el coeficiente $3(x_0{}^2-4x_0+4)=0, 3(x_0-2)^2=0, es\quad decir: x_0=2$

Se verifica (1) o (2); es decir: $f(x_0+(\pm\delta))-f(x_0)=f(2+(\pm\delta))-f(2)=-(\pm\delta)^3$ En la vecindad del punto $x_0=2$. No es negativa, ni es positiva, como no se verifica (1) o (2). Entonces no posee extremos locales.

Algoritmo (II) para determinar la pendiente m de la recta tangente en el punto x_0. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Dada la función $y=f(x)$.

1. Se plantean las desigualdades (1) cóncava y (2) convexa.

$$(1)\ f(x_0 + (\pm\delta) - f(x_0) - m(\pm\delta) \leq 0,\ (2)\ f(x_0 \pm \delta) - f(x_0) - m(\pm\delta) \geq 0$$

2. Se realizan operaciones aritméticas y por comparación, respectivamente en las expresiones (1) o (2) hasta agrupar los sumandos convenientemente en función de δ y sus potencias (es posible utilizar un programa informático profesional para realizar las simplificaciones).
3. Se anula (se iguala a cero) el coeficiente de δ, se determina el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en el valor de x_0; es decir la primera derivada de la función en x_0 mediante la utilización de un programa informático profesional se comprueban los cálculos de la primera derivada y sus ceros.
4. Se analiza a partir de valor $\delta > 0$, si se verifican las desigualdades (1) y (2) en cada punto x_0 del dominio de la función.
5. Se concluye con la determinación de los intervalos de concavidad y convexidad, según se verifican (1) o (2) respectivamente.
6. Según los intervalos de concavidad y convexidad y el valor de la pendiente "m" de la recta tangente a la curva de la función en el punto analizado, se determinan los puntos de inflexión. Se indican sus coordenadas.

Observación: 1.- se emplea en la resolución de problemas de optimización (determinación de intervalos de monotonía); 2.- la visualización y el pensamiento matemático y científico juegan un papel protagónico en la verificación de los pasos del algoritmo.

Algoritmo (III) para la construcción de la curva de la función. Dada la función $y = f(x)$.

1. Se determina el dominio, los ceros de la función, se evalúa la función en $x_0 = 0$.
2. Se desarrolla el algoritmo (I).
3. Se desarrolla el algoritmo (II).
4. Se analizan los resultados obtenidos en los pasos 1, 2 y 3 se traza el bosquejo del gráfico de la función (la utilización de un programa informático profesional constituye un importante auxilio en la graficación de la función).
5. Se verifican y reanalizan a través de la comparación del bosquejo de la curva con el gráfico (curva) obtenido por el programa informático profesional utilizado.

Observación: la visualización y el pensamiento matemático y científico juegan un papel protagónico en la verificación de los pasos del algoritmo.

Algoritmo (IV) sobre resolución de problemas de salud.

1. Se selecciona el problema de salud, según sus características: 1. Trata, y si no mejora, orienta y remite; 2. Trata de urgencia, orienta y remite; 3. Orienta y remite; 4. Colabora (1, 2, 3, y 4).
2. Se realiza la terapéutica (se trata al paciente) según el diagnóstico;
3. Según las exigencias del tipo de problema de salud a resolver (1, 2, 3, y 4) se desarrollan los algoritmos I, II, III.
4. Se verifica el diagnóstico y el tratamiento aplicado, según el desarrollo de los algoritmos I, II, III.
5. No siempre en los problemas de salud es aplicable este Algoritmo IV. Depende de las exigencias del tipo de problema de salud (paso 3).

Observación: cuando se analiza un problema de salud a enfrentar por el Médico General, el cual exige de la aplicación al menos de un Algoritmo del tipo I, II o III, se identifican ejes interdisciplinarios en los cuales diferentes disciplinas del ciclo básico y clínico pueden trabajar coordinadamente.

A continuación se proponen problemas, los cuales constituye ejemplos, en cuanto a la utilización de ejes interdisciplinarios.

Problema 1: Después de una hora de suministrado x miligramos de un medicamento en particular a una persona, el cambio de la temperatura T(x) en grados Fahrenheit es modelado por la ecuación $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{9}, \quad 0 \le x \le 7$.

La razón de cambio de la temperatura con respecto a la medida de la dosis x, T´(x), es denominado la sensibilidad del cuerpo para la dosis. Hallar T´(x). Determinar T´(1), T´(3) y T´(6).

Se aplican los algoritmos. Algoritmo I

Paso 1. $T(x_0 + (\pm\delta)) - T(x_0) = ((2x_0 - \frac{{x_0}^2}{3}) - \frac{x_0}{3}(\pm\delta) - \frac{(\pm\delta)^2}{9})(\pm\delta) \le 0$. Se obtiene que $2x_0 - \frac{{x_0}^2}{3} = 0$; es decir $x_0 = 6$, la función del cambio de temperatura T(x) alcanza su valor máximo $T(6) = 12$. Para el valor $x_0 = 0$ y el dominio de la función, así como la naturaleza de la función T (0) = 0, es un valor mínimo.

Algoritmo II. Se obtiene de los pasos 1 al 3.

$$T(x_0 + (\pm\delta)) - T(x_0) - m(\pm\delta) = ((2x_0 - \frac{{x_0}^2}{3} - m) + (1 - \frac{x_0}{3})(\pm\delta) - \frac{(\pm\delta)^2}{9})(\pm\delta)$$

$m = 2x_0 - \frac{{x_0}^2}{3}$. Paso 4. Primero se simplifica y se obtienen las desigualdades: $((1 - \frac{x_0}{3})(\pm\delta) - \frac{(\pm\delta)^2}{9})(\pm\delta) = (1 - \frac{x_0}{3}) - \frac{(\pm\delta)}{9})(\pm\delta)^2$ se obtiene, $(1 - \frac{x_0}{3}) - \frac{(\pm\delta)}{9}) > 0$ es decir; es cóncava en el intervalo $3 < x_0 < 7$; es convexa cuando $(1 - \frac{x_0}{3}) - \frac{(\pm\delta)}{9}) < 0$, en el intervalo $0 < x_0 < 3$.

Observación: Se ha determinado que la pendiente de la recta tangente en cada punto de la función $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{9}, 0 \le x \le 7$; es $m = 2x_0 - \frac{{x_0}^2}{3} = T'(x_0)$; en este problema se interpreta como la razón de cambio de la temperatura con respecto a la medida de la dosis x_0, es decir $T'(x_0)$, es denominada la sensibilidad del cuerpo para la dosis x_0.

Se determina el extremo si se aplica el Algoritmo I, aunque no es necesario, pues el estudiante conoce el método de trabajo de la enseñanza general media.

Algoritmo III.

Paso 1. El dominio está dado, ceros: 0 y 9, al resolver la ecuación y T(0) = 0. Los pasos 2 (Algoritmo I) y 3 (Algoritmo II) se realizaron.

Paso 4. Se utiliza un programa informático y se presenta el gráfico de la función en su dominio.

Algoritmo (IV) sobre resolución de problemas de salud.

1. Se selecciona el problema de salud, según sus características (nivel de actuación del Médico General (1, 2, 3, y 4). Se seleccionan problemas de salud a enfrentar por el Médico General. Con síndromes infecciosos como problema de salud, síndrome febril con signos de localización con un nivel de actuación 2.

2. Se realiza la terapéutica (se trata al paciente) según el diagnóstico. Se realiza un estudio para medir la temperatura y la sensibilidad del cuerpo para la dosis en el momento indicados (después de una hora).
3. Según las exigencias del tipo de problema de salud a resolver y su nivel de actuación (1, 2, 3, y 4) se desarrollan los algoritmos I, II, III.
4. Se verifica el diagnóstico y el tratamiento aplicado, según el desarrollo de los algoritmos I, II, III (este se prueba en la práctica para comparar).
5. No siempre en los problemas de salud es aplicable este Algoritmo IV. Depende de las exigencias del tipo de problema de salud (paso 3).

Se proponen tres problemas adicionales, estos están relacionados con la propuesta didáctica y problemas de salud a enfrentar por el Médico General y los objetivos de Asignaturas del ciclo básico y clínico.

Problema 2: Se asume que el decrecimiento de la presión sanguínea en una persona depende en particular de la cantidad de medicamento suministrado. Por lo tanto si x miligramos de un medicamento han sido suministrado, el decrecimiento de la presión sanguínea está en función de x. Se define la función tal que $f(x)=\frac{1}{2}x^2(k-x)$ y x está en $[0,k]$, donde k es una constante. Determine el valor en miligramos de forma que cause el mayor decrecimiento en la presión sanguínea.

Problema 3: Si el radio normal de la traquea es R expresado en centímetros y el radio de la traquea durante una tos es r expresado en centímetros, donde R es una constante y r es una variable. La velocidad del aire a través de la traquea puede darse en función de r y si $v(r)$ en centímetros por segundos es la velocidad, entonces $v(r)=kr^2(R-r)$ donde k es una constante positiva y r esta en el intervalo $\left[\frac{1}{2}R,R\right]$. Determine el valor del radio r, cuando la velocidad es máxima.

Problema 4: La función siguiente $P(x)=\frac{30x^2}{(1+x^2)^2}$ modela el comportamiento de una epidemia en una comunidad en particular, x es el tiempo expresado en meses (eje horizontal) y P se expresa en porcentaje (eje vertical). Comparar los gráficos de la función y su primera derivada para indicar en los cuatro primeros meses con el trazo de rectas verticales el valor del máximo porcentaje, los intervalos de monotonía de la función P, así como los intervalos de convexidad de la función $P = P(x)$.

Problema 5: Se ha suministrado al paciente una píldora, cuyo medicamento en el torrente sanguíneo posee una razón cambio con respecto al tiempo t (en minutos), según su asimilación, es modelado por la función $R(t) = t\exp(-0.2t) = te^{-0.2t}$. ¿En qué momento la razón de cambio es máxima?

Por la naturaleza del problema solo se consideran valores no negativos en el dominio de la función.

$R(t_0 + (\pm\delta)) - R(t_0) = \dfrac{t_0 + (\pm\delta) - t_0\exp(0.2(\pm\delta))}{\exp(0.2(t_0 + (\pm\delta))}$, la expresión del denominador es positiva por ello se trabaja con la expresión, es decir, $t_0 + (\pm\delta) - t_0\exp(0.2(\pm\delta)) \le t_0 + (\pm\delta) - t_0(0.2(\pm\delta) + 1)$, si comparamos las funciones cuyas expresiones corresponden a la recta y la función exponencial se cumple la desigualdad $0.2(\pm\delta) + 1 \le \exp(0.2(\pm\delta))$ en la vecindad del cero (0).

Se obtiene entonces la igualdad $t_0 + (\pm\delta) - t_0(0.2(\pm\delta) + 1) = (\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5})$.

Por diferenciación de casos:

1. si la expresión $(1 - \frac{t_0}{5}) < 0$, entonces $(\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5})$, es positivo y negativo para cualquier valor real, lo que significa que en ese caso no existe ni máximo, ni mínimo;

2. si la expresión $(1 - \frac{t_0}{5}) > 0$, entonces $(\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5})$, es positivo y negativo para cualquier valor real, lo que significa que no existen máximos, ni mínimos.

3. si la expresión $(1 - \frac{t_0}{5}) = 0$, entonces $t_0 = 5$, de la expresión, se obtiene la igualdad $t_0 + (\pm\delta) - t_0(0.2(\pm\delta) + 1) = (\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5}) = 0$, por lo tanto, cuando $t_0 = 5$ la diferencia $R(t_0 + (\pm\delta)) - R(t_0) \le 0$, lo que significa que la función alcanza su valor máximo, cuando $t_0 = 5$, es decir, 5 minutos después de ingerir la píldora.

Para la determinación de la pendiente "m" de la recta tangente, se plantea la desigualdad:

$R(t_0+(\pm\delta))-R(t_0)\leq m(\pm\delta)$ Se realizan transformaciones, la expresión se reduce $t_0+(\pm\delta)-t_0\exp((0.2)(\pm\delta))\leq m(\pm\delta)\exp((0.2)(t_0+(\pm\delta))$. Se continúa el trabajo conveniente de reducción $(t_0+(\pm\delta))\exp((-0.2)(\pm\delta))\leq t_0+m\exp(0.2t_0)(\pm\delta)$. Como $0<((-0.2)(\pm\delta)+1)<\exp((-0.2(\pm\delta))$. Se obtiene $(t_0+(\pm\delta))((-0.2)(\pm\delta)+1)\leq t_0+m\exp(0.2t_0)(\pm\delta)$ Se reduce a la expresión $(\pm\delta)\left[(-0.2)(\pm\delta)-(0.2)t_0-m\exp(0.2t_0)+1\right]\leq 0$ Por diferenciación de casos:

1. si la expresión es negativa $-(0.2)t_0-m\exp((0.2)t_0)+1<0$; pero entonces la desigualdad es positiva o negativa. Lo cual conduce a una contradicción; pues no se cumple la desigualdad planteada; es decir la recta no es tangente a la curva de la función en el punto t_0.

2. Si la expresión es positiva $-(0.2)t_0-m\exp((0.2)t_0)+1>0$, conduce de manera análoga a una contradicción; pues no se cumple la desigualdad planteada; es decir la recta no es tangente a la curva de la función en el punto t_0.

3. Si la expresión se anula; es decir $-(0.2)t_0-m\exp((0.2)t_0)+1=0$. Se obtiene la pendiente, $m=1.e^{(-0.2)t_0}+t_0(-0.2)e^{(-0.2)t_0}=(1-0.2t_0)e^{(-0.2)t_0}=(1-\frac{t_0}{5})e^{(-0.2)t_0}$, así se obtiene la derivada en el punto t_0, si observamos se visualiza la tradicional regla de derivación del producto de dos funciones, cuando $m=(1-\frac{t_0}{5})e^{(-0.2)t_0}=1.e^{(-0.2)t_0}+t_0(-0.2)e^{(-0.2)t_0}$; la función exponencial es la composición de dos funciones además; es decir la derivada de la compuesta es $(-0.2)e^{(-0.2)t_0}$, en particular la derivación de funciones compuestas (se aplica la regla de la cadena), brinda posibilidades reales de generar conocimientos de considerable importancia en el orden didáctico y metodológico para cursos introductorios para los que comiencen el estudio del Cálculo Diferencial o en estudios de precálculos (Valdés y Sánchez, 2008). Para la determinación de la derivada del cociente de funciones es posible inferir su correspondiente regla de derivación, en el caso $f(t)=te^{-0.2t}=\frac{t}{e^{0.2t}}$.

Si se utilizan los resultados descritos, se obtiene nuevamente la pendiente de la función primera derivada como sigue: $m_m = (-\frac{1}{5})e^{(-0.2)t_0} + (1-\frac{t_0}{5})(-0.2)e^{(-0.2)t_0} = (\frac{2}{5}-\frac{t_0}{25})e^{(-0.2)t_0}$, se obtiene su extremo, cuando $t_0 = 10$.

Conclusiones

Se determinaron los intervalos de monotonía y extremos locales de funciones, los intervalos de convexidad y concavidad, aspectos esenciales en la construcción de curvas de funciones, así como en la resolución de problemas de optimización sin el uso de límites y derivadas, como se indica en el punto 3 del algoritmo II. Se profundizan las aplicaciones del método como modelo para estudiar propiedades topológicas de las funciones elementales; el uso de las Tecnologías Informáticas permite visualizar los resultados. Esta herramienta matemática constituye una alternativa didáctica y metodológica para experimentar en las aulas y enfrentar diversas tareas con relación al contexto social, con variadas posibilidades no explotadas al respecto. Además es de incalculable valor las posibilidades creativas para generan conocimientos con relación al Cálculo Diferencial, en función de la motivación, profundización, comprensión e interpretación en su proceso de enseñanza y aprendizaje y la formación matemática de estudiantes en cuyas carreras, no se imparte las Matemáticas Superiores.

Referencias bibliográficas

Font Moll, V. (2009). *Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función* $F(x) = x^2$ *sin usar la definición por límites.* Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18, 15 – 28. Recuperado el 18 de enero de 2011 de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Escalona, L. y Velázquez, J. (2007). *Método alternativo para el análisis de algunas propiedades de las funciones elementales sin el uso de las derivadas.* Memorias del X Congreso Nacional de Matemática y Computación como número especial del Boletín de la Sociedad de Matemática y Computación. La Habana. Cuba (en soporte digital).

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. En: G. Martínez Sierra (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 386-391.México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stewart, J. (1999) *Calculus*: EarlyTtranscedentes, International Thomson Publ. Inc.

Valdés, C. y Sánchez, C. (2008). *Introducción al Análisis Matemático*. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba (en soporte digital).