O PAPEL DA ABSTRAÇÃO NO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Lilian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro IM- UFRJ Brasil
CETIQT/SENAI
lnasser@im.ufrj.br

Resumo. A transição do pensamento matemático elementar para o avançado gera dificuldades em alunos do Ensino Superior, pois requer a construção de fundamentos intuitivos para conceitos matemáticos mais elaborados. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva, levando à abstração. Três processos contribuem para a abstração: representação, generalização e síntese. Neste trabalho, a diferença entre generalização e abstração é esclarecida, por meio de exemplos. Também serão abordados os três tipos de abstração destacados por Piaget: as abstrações empírica, pseudo-empírica e reflexiva. Os alunos devem perceber que não basta verificar uma afirmativa para alguns exemplos, mas é preciso justificá-la de modo genérico, chegando à abstração para casos mais gerais

Palabras clave: pensamento matemático avançado, abstração, aprendizagem

Abstract. The transition from the elementary to the advanced mathematical thinking generates difficulties in university students, since it requires the construction of intuitive foundations for more elaborated mathematical concepts. This transition requires a cognitive reconstruction, leading to the abstraction. Three processes contribute for the abstraction: representation, generalization and synthesis. In this work, the difference between generalization and abstraction is clarified, by means of examples. Also, the three types of abstraction detached by Piaget will be focused: the empirical, pseudo-empirical and reflexive abstractions. Students must perceive that it is not enough to verify the validity of an affirmation for some examples only, but it must be justified in a generic way, leading to the abstraction for more general cases.

Key words: advanced mathematical thinking, abstraction, learning

Introdução

Alunos ingressantes no Ensino Superior apresentam muitas dificuldades nas disciplinas da área de Matemática, notadamente em Cálculo e Álgebra Linear. Essas dificuldades se devem, principalmente, a lacunas na aprendizagem da Matemática básica e ao caráter abstrato dos conceitos abordados nessas disciplinas. O ensino, na grande maioria das disciplinas do Ensino Superior, segue o esquema 'teorema – demonstração – exemplo – aplicação'. Esse modelo tem diversas vantagens e até funciona bem para alunos de graduação em Matemática, mas não atende à grande maioria dos alunos da licenciatura ou dos demais cursos que têm o Cálculo como disciplina de serviço. Dreyfus (1991) relata várias pesquisas que mostram os problemas de aprendizagem gerados por esse modelo de ensino.

Muitas vezes os professores do Ensino Superior não atentam para o fato de que os alunos necessitam fazer uma transposição cognitiva para construir uma aprendizagem significativa.

Em geral, na Escola Básica, o aluno toma conhecimento dos resultados principais da Matemática já prontos, sem ter a oportunidade de acompanhar sua evolução histórica. Segundo Tall (1991),

> [...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições. (Tall, 1991, p. 20)

Essa transição requer uma reconstrução cognitiva, cuja ausência contribui para as dificuldades enfrentadas pelos alunos calouros, ao lidar com as abstrações. Enquanto na Matemática elementar os conteúdos seguem uma coerência, na Matemática avançada, os alunos devem construir entidades abstratas, por meio de deduções a partir de definições formais.

Abstração é definida no Dicionário Aurélio, como o *´ato de separar mentalmente um ou mais elementos de uma totalidade complexa (coisa, representação, fato), os quais só mentalmente podem subsistir fora dessa totalidade´*. De acordo com essa definição, a abstração em Matemática é uma habilidade que nem sempre é dominada pelos alunos ingressantes no Ensino Superior, e seu desenvolvimento deve ser estimulado pelos professores das disciplinas básicas.

Desenvolvendo a habilidade de abstração

A habilidade de abstração deve ser desenvolvida desde os primeiros anos de escolaridade. Os conceitos de número, reta e quadrado são exemplos de objetos matemáticos que dependem de uma abstração.

Três processos contribuem para a abstração: representação, generalização e síntese. No caso dos números, por exemplo, é imprescindível que os alunos entendam a diferença de *representação* de um número natural e de um número racional: enquanto o número natural tem uma representação numérica única, um número racional representa uma classe de equivalência, com infinitos elementos, que são representações distintas para o mesmo número. Se esse conceito não for bem construído, os alunos não dominam o conceito de frações equivalentes, e essa dificuldade cria obstáculos para a aprendizagem de diversos conceitos, como porcentagem e escalas de ampliação ou redução.

Dreyfus (1991) afirma que

> [...] representação e abstração são, então, processos complementares em direções opostas: por um lado, um conceito é frequentemente abstraído de várias de suas representações e, por outro lado, as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato. Quando uma única representação

> de um conceito é usada, a atenção pode estar focada nela, em lugar do objeto abstrato. Entretanto, quando diversas representações são usadas em paralelo, a relação com o conceito abstrato correspondente se torna importante. (Dreyfus, 1991, p. 38).

A *generalização* implica na identificação de elementos comuns ou de um padrão, permitindo a expansão de domínios de validade. Uma prática para desenvolver a habilidade de generalização é explorar o reconhecimento de padrões desde os anos iniciais, que mais tarde podem facilitar a introdução à álgebra e na representação em linguagem algébrica de uma lei de formação.

Mas é preciso distinguir entre generalização e abstração. O conceito de espaço vetorial é um bom exemplo para ilustrar essa distinção. Trabalhando inicialmente com os espaços IR^2 e IR^3, a generalização para o espaço de n variáveis, o IR^n, é praticamente automática, preservando as operações de adição e multiplicação por escalar. No entanto, a transposição para a noção de um espaço vetorial V constitui uma *abstração*, em que é preciso identificar as operações inerentes a esse espaço vetorial, e suas propriedades.

O processo de *síntese* consiste em combinar ou compor partes de modo a formar um bloco inteiro, compacto. Esse inteiro constitui mais do que simplesmente a soma das partes, dá origem a uma única entidade, onde as partes se interrelacionam. Dreyfus (1991, p.35) cita como exemplo de síntese a imersão de vários tópicos de Álgebra Linear estudados separadamente, como ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformação de bases, resolução de sistemas lineares. Mais adiante, todos esses fatos, a princípio desconexos, se fundem, formando um conteúdo unificado, graças a um processo de síntese.

A seguir são apresentados exemplos reais, observados em salas de aula.

Exemplos

O seguinte problema foi proposto para alunos ingressantes num curso técnico pós- médio:

Num campeonato, cada time deve enfrentar todos os seus concorrentes apenas uma vez. Determine o número de partidas desse campeonato, quando há: a) 5 times; b) 8 times; c) n times.

Por meio de esquemas, tabelas ou representação gráfica, os alunos foram capazes de perceber que no caso de 5 times, há 10 partidas, e que quando há 8 times disputando o campeonato, são necessárias 28 partidas para definir o campeão. No entanto, a grande maioria dos alunos não foi capaz de fazer a generalização para n times. A instrução de que n representava um número qualquer levou muitos alunos a escolherem um determinado valor para o n e calcular o número de partidas num campeonato com esse número de times.

O raciocínio e a representação usados para definir o número de partidas com os números definidos de times podem ajudar na generalização. Neste caso, a confecção de uma tabela para o campeonato facilita a visualização de que cada um dos n times joga com todos os outros (n – 1) times. Portanto, são n x (n - 1) partidas. Como os times se enfrentam uma única vez, é preciso dividir por 2, para eliminar a duplicidade de jogos, chegando ao número de partidas para o campeonato com n times: $\frac{n\,(n-1)}{2}$.

A tabela a seguir mostra a representação do número de partidas num campeonato com 5 times. A configuração triangular facilita a obtenção da lei de formação para o caso de n times (generalização).

Times	T 1	T 2	T 3	T 4	T 5
T 1		X	X	X	X
T 2			X	X	X
T 3				X	X
T 4					X
T 5					

Tabela 1- Esquema para a solução do caso de 5 times

Quando esses alunos tiveram que encontrar o número de partidas de um outro campeonato, seguindo outra modalidade, muitos ignoraram as novas regras e responderam como se fosse o mesmo esquema já visto anteriormente. Ou seja, mesmo alguns alunos que conseguiram generalizar o problema do 1º tipo de campeonato, não conseguiram pensar num esquema "mata-mata", ou seja num campeonato que, em cada partida, um competidor é eliminado. Nesse caso, os alunos não chegaram à abstração.

Um exemplo de abstração ocorreu numa turma de Cálculo II (Nasser, Sousa e Torraca, 2012). O tópico era Coordenadas Polares, e a questão proposta foi a seguinte:

Determine todos os pontos de interseção das cardióides $R = 1 + \cos\theta$ e $R = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$.

O objetivo era que os alunos traçassem os gráficos das curvas e igualassem as duas equações polares, percebendo que os pontos de interseção se referem ao ângulo θ que satisfaz à igualdade $\cos\theta = -\mathrm{sen}\,\theta$, ou seja, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. No entanto, um aluno apresentou a solução mostrada na figura 1 a seguir, aplicando a translação e a reflexão de gráficos, enfatizada pela professora em outro contexto, na disciplina de Cálculo I.

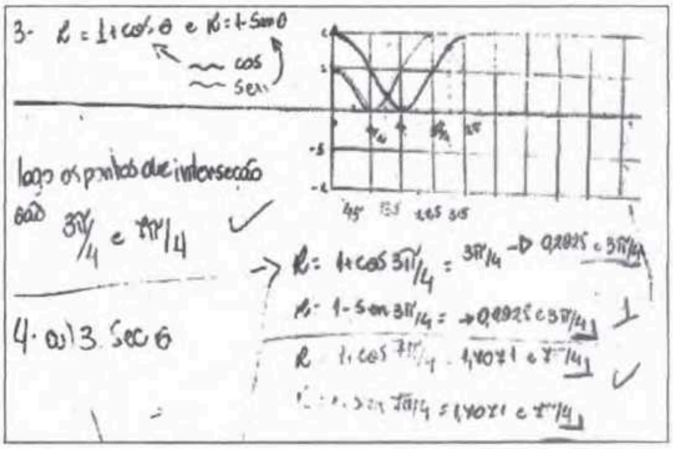

Figura 1: Transformação de gráficos aplicada em outro contexto.

O trabalho com geometrias não euclidianas é outro exemplo de atividade que requer abstração, uma vez que as leis válidas na Geometria Euclidiana devem ser abandonadas. Isso constitui uma dificuldade para os alunos, acostumados a lidar apenas com os axiomas e propriedades da geometria Euclidiana. Devem admitir que em outras geometrias é possível formar triângulos com dois ângulos retos ou com soma dos ângulos internos menor que 180º. Por exemplo, no trabalho com geometrias finitas, os alunos devem aceitar que uma reta tem apenas um número finito de pontos e que, muitas vezes, as interseções aparentes nos diagramas não constituem pontos reais de interseção.

Na Escola Básica, o conceito de proporcionalidade aparece em vários conteúdos, ao longo dos anos de escolaridade. As noções de dobro e triplo, os múltiplos de um número, as frações equivalentes, as escalas nos mapas, a razão entre figuras semelhantes são apenas alguns exemplos. Mais adiante, todas essas idéias se unem no conceito de função linear, incluindo ainda as noções de progressões aritméticas e juros simples.

De acordo com Dreyfus (1991, p. 40), além da representação, generalização e síntese, envolvidos na abstração, outros processos devem ocorrer interligando os elos de cadeias de conhecimento, como: descoberta, intuição, verificação, prova e definição.

Tipos de abstração

Piaget distinguiu três tipos de abstração: a abstração empírica, a abstração pseudo-empírica e a abstração reflexiva.

A *abstração empírica* depende da observação externa de cada indivíduo a respeito de propriedades do objeto em questão. As propriedades estão no objeto, mas são percebidas externamente do ponto de vista de cada indivíduo.

> De acordo com Piaget, esse tipo de abstração leva à extração de propriedades comuns de objetos e a generalizações extensivas, isto é, a passagem de "alguns" para "todos", do específico para o geral. (Dubinsky, 1991, p. 97)

No caso da *abstração pseudo-empírica*, entram em jogo também ações introduzidas nos objetos pelo sujeito. Considere, por exemplo, uma abstração alcançada a partir de um esquema ou representação do objeto criada pelo sujeito. Nesse caso, a abstração é empírica porque depende das propriedades do objeto, mas também depende da configuração criada pelo sujeito. É, portanto, um exemplo de abstração pseudo-empírica.

A *abstração reflexiva* se origina no indivíduo e depende de suas ações. Esse tipo de abstração está associado não apenas às ações propriamente ditas, mas também às inter-relações entre essas ações. O mais importante neste tipo de abstração é a construção de novas combinações a partir da conjunção de abstrações. Esse aspecto construtivo da abstração reflexiva exerce um papel fundamental no pensamento matemático avançado.

De acordo com Dubinsky (1991, p. 99),

> [...] a abstração reflexiva difere da abstração empírica, pois lida com ação em oposição a objetos e difere da abstração pseudo-empírica no sentido de que trata, não tanto com as ações propriamente ditas, mas com as interrelações entre ações. (Dubinsky, 1991, p. 99)

Nesse trabalho, Dubinsky (1991, p. 98) cita vários conceitos matemáticos considerados por Piaget como resultados de abstrações reflexivas, como o conceito de grupos, a teoria geral de categorias, a impossibilidade de construir o conjunto de todos os conjuntos e o conceito matemático de função.

Portanto, a abstração reflexiva pode ser uma ferramenta poderosa no ensino e aprendizagem de conteúdos da educação superior que envolvem o pensamento matemático avançado. Por meio da sua compreensão, é possível criar caminhos e desenvolver sequências didáticas que ajudem nossos alunos a desenvolver habilidades para construir significativamente conceitos básicos.

Referências bibliográficas

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: *Kluwer Academic Publisher.*

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: *Kluwer Academic Publisher.*

Nasser, L; Sousa, G. A.; Torraca, M. A. (2012). Promovendo a Prontidão para a Aprendizagem de Cálculo. En F. Sabrá (Org), *Inovação, Estudos e Pesquisas: reflexões para o universo têxtil e de confecção, 3* (pp. 43-54). Rio de Janeiro: Estação das Letras e Cores.

Tall, D. (1991).The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: *Kluwer Academic Publisher.*