DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN TAREAS MATEMÁTICAS QUE HACEN USO DE DIFERENTES REPRESENTACIONES

Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez
ESIME-IPN, CECyT 11-IPN México
martha.garcia@gmail.com, abenitez@ipn.mx

Resumen. El objetivo de este trabajo es identificar los factores que influyen para que el alto nivel de demanda cognitiva de una tarea se mantenga durante la implementación de la misma. Se analizó el trabajo de nueve estudiantes inscritos en el primer semestre de una carrera de ingeniería. Los elementos teóricos que se tomaron en cuenta para el análisis, incluyen la demanda cognitiva de una tarea y su relación con los aprendizajes de los estudiantes. Se utilizó una metodología cualitativa de tipo experimental y la actividad se desarrolló durante dos sesiones y en dos etapas. Se obtuvo evidencia para afirmar que la posibilidad de utilizar distintas representaciones para explorar la tarea, favoreció el que los estudiantes pusieran en práctica sus conocimientos previos para resolver con éxito la tarea.

Palabras clave: tarea matemática, demanda cognitiva, competencias, representaciones

Abstract. The aim of this paper is to identify the elements that maintain the high level of cognitive demand in a task during the students work. We analyzed the work of nine students enrolled in the first half of an engineering career. The theoretical framework for analysis includes the task cognitive demand and relationship to student learning. We use qualitative and experimental methodology; the experience took place during two sessions in two stages. Evidence was obtained to assert that the use of different representations to explore the task, favored the student´s work to put into practice prior knowledge to successfully solve the task.

Key words: mathematical task, cognitive demand, competences, representations

Introducción

En la primera década del siglo XXI hemos sido testigos de reformas educativas que se han realizado en diferentes países, algunas sin consolidar, otras apenas inician pero todas orientadas a satisfacer los enormes desafíos que plantean las sociedades contemporáneas. Las realizadas en Europa han influido en gran parte del mundo, como se puede constatar con la puesta en marcha del Proyecto Tuning para América Latina. En México algunas universidades fueron elegidas por la Secretaría de Educación Pública, para participar en el proyecto Tuning para América Latina (Proyecto Tuning para América Latina, 2007). En las reformas se destaca la pertinencia de incluir en la formación escolar de los individuos, el desarrollo de *competencias claves* que los capaciten para resolver problemas en diferentes contextos. En cuanto a los contenidos, se establecen estructuras conceptuales que incluyen procedimientos y su conexión con otras ciencias; el énfasis está en proporcionar experiencias de aprendizaje en diferentes contextos. El aprendizaje se concibe asociado con aspectos cognoscitivos, valores y normas sociales vigentes. Proenza y Leyva (2006).

En relación con las matemáticas, en las reformas se identifica como prioritario: a) plantear como punto central del currículo las finalidades de la educación matemática, para ajustarlas a las necesidades del ciudadano y de la sociedad; b) promover el papel social de la educación matemática en un mundo en que la tecnología desempeña un papel dominante; c) considerar la resolución de problemas como centro de las matemáticas escolares y, d) acompañar las propuestas de innovación y reformas curriculares con materiales desarrollados de acuerdo con propuestas didácticas y textos (Proenza y Leyva, 2006). También se considera orientar la reflexión de los estudiantes para que conciban esta disciplina: como una herramienta para entender e interpretar un fenómeno y no como una secuencia de algoritmos para ser memorizados y aplicados; como una forma de identificar patrones, realizar conjeturas y verificarlas y como una forma de comunicar, a sus compañeros y profesores, el conocimiento que logran de las matemáticas utilizando el lenguaje formal y el escrito (ICAS, 2010). Sin duda alguna el desarrollo de estas competencias está ligado a la instrucción que los estudiantes reciben en el aula, Arbaugh y Brown (2004) señalan que las actividades que realizan los estudiantes en el salón de clase, como la resolución de problemas, son tan importantes que pueden ser consideradas el corazón de las clases de matemáticas, por lo que resulta fundamental la selección o el diseño de las mismas.

Las ideas anteriores forman parte del sustento teórico de dos investigaciones que se llevaron a cabo en el IPN (Números de Registro 20111060 y 20110397) y que tuvieron como objetivo desarrollar competencias matemáticas en estudiantes de bachillerato del área de ciencias exactas y de ingeniería. Una pregunta que guío las investigaciones fue ¿Qué factores influyen para que el nivel de demanda cognitiva de una tarea se mantenga durante la implementación de la misma? Para dar respuesta a la pregunta se establecieron como objetivos específicos: a) Analizar las características de las tareas matemáticas de acuerdo con el nivel de demanda cognitiva que requieren de los estudiantes; b) Conocer los antecedentes académicos de los estudiantes y relacionarlos con los objetivos curriculares c) Analizar el trabajo de los estudiantes en las tareas.

Elementos teóricos

¿En qué medida, una actividad que se realiza en el aula promueve el desarrollo de conceptos y habilidades que se consideran esenciales en las matemáticas? ¿Qué información es útil para conocer la naturaleza de la enseñanza y la forma en que ésta se puede mejorar? Es posible considerar el proceso de enseñanza como la interacción entre diversos elementos que incluyen: las interacciones del profesor con los estudiantes como el elemento principal; los conocimientos del profesor y los estudiantes, las tareas propuestas, la evaluación y los materiales utilizados en clase. Ponce, Preiss y Núñez (2010) consideran que el tipo de pensamiento que los estudiantes ponen en acción al resolver los problemas es lo que determina su aprendizaje; por lo que conocer sobre los procesos que desarrollan los estudiantes en las aulas, las relaciones entre las características de la instrucción y los aprendizajes de los estudiantes se convierte en una herramienta importante para subsanar las deficiencias de los estudiantes.

En la perspectiva teórica del proyecto se utiliza el término tarea para hacer referencia a las actividades propuestas a los estudiantes. Schultz (2009) define el término *tarea* como una actividad que se lleva a cabo en la clase y que dirige la atención de los estudiantes para desarrollar una idea matemática particular, también es posible utilizar una secuencia de tareas para formar la idea, cada una de ellas incluye problemas o ejercicios. Las tareas diseñadas o seleccionadas por el profesor deben promover el desarrollo de competencias matemáticas, por lo que resulta fundamental conocer cuáles son las características que hacen que una tarea cumpla con estos objetivos.

Stein, Smith, Henningsen, & Silver (2009), señalan que una tarea matemática puede ser analizada considerando el tipo de razonamiento que los estudiantes ponen en práctica para realizarla. Los mismos autores utilizan el término *demanda cognitiva* para hacer referencia al tipo y al nivel de pensamiento que los estudiantes requieren para involucrarse y resolver con éxito la tarea. Describen dos aspectos a considerar para evaluar una tarea; 1) ir más allá de las características superficiales de una tarea, ya que estas con frecuencia no indican el nivel de complejidad matemática de la tarea; 2) el nivel de demanda cognitiva depende de los estudiantes que la ejecutan. Stein & Smith (1998) consideran los siguientes niveles para clasificar las tareas: a) Bajo nivel de demanda cognitiva (Memorización); b) Bajo nivel de demanda cognitiva (Procedimiento sin conexiones); c) Alto nivel de demanda cognitiva (Procedimiento con conexiones) y d) Alto nivel de demanda cognitiva (Trabajar en matemáticas). Dos características fundamentales de este nivel son: que la información es representada en múltiples formas, y que las conexiones entre las representaciones ayudan al desarrollo de significados. Parnafes y diSessa, (2004) apuntan que cada representación utilizada resalta aspectos de un concepto, y que al emplear varias representaciones los estudiantes enriquecen la comprensión del mismo. Al respecto García y Benítez (2011) señalan que la información subyacente en cada representación es percibida en forma diferenciada por los estudiantes y que una tarea que hace uso de diferentes representaciones promueve la transferencia del conocimiento adquirido en cursos anteriores.

Metodología

En el desarrollo de la investigación se utilizó una metodología cualitativa que incluyó las siguientes fases:

1) Aplicación de un conjunto de tareas matemáticas ubicadas en un alto nivel de demanda cognitiva; 2) Análisis del trabajo de los estudiantes en las tareas.

Participantes y recolección de datos Las tareas se aplicaron a un grupo de nueve estudiantes que se encontraban inscritos en el primer semestre de una carrera de ingeniería. La actividad se desarrolló durante dos sesiones y en dos etapas; en la primera los nueve estudiantes trabajaron en equipos de tres, y en la segunda, dos estudiantes a los que nos referiremos como Estudiante A, y Estudiante B, expusieron al resto del grupo el trabajo que habían realizado. Los materiales empleados incluyeron lápiz y papel, calculadora científica y pizarrón; las sesiones fueron grabadas con un equipo de audio y video.

Tarea de las diagonales de un cuadrado. Las diagonales de un cuadrado de lado 8 se encuentran sobre los ejes coordenados, determine las coordenadas de los vértices del cuadrado.

La tarea se ubicó en el nivel tres de la taxonomía propuesta por Smith y Stein, (1998), alto nivel de demanda cognitiva (procedimiento con conexiones) porque orienta la atención de los estudiantes al uso de procedimientos para desarrollar niveles de entendimiento profundo de los conceptos e ideas matemáticas; sugiere trayectorias explícitas o implícitas a seguir y es posible representarla en múltiples formas diagramas visuales o simbólicamente, las conexiones entre múltiples representaciones ayuda a desarrollar significados y demanda un alto grado de esfuerzo cognitivo.

El contenido matemático de las tareas. Las tareas incluyen ideas matemáticas que forman parte de los antecedentes de los estudiantes: teorema de Pitágoras; congruencia de triángulos, concepto de simetría, sistema de coordenadas rectangulares y características para la construcción de un cuadrado. Tienen como característica el establecer relaciones entre diferentes representaciones, lo que de acuerdo con Parnafes y diSessa (2004), contribuye al desarrollo de significados.

Relación del contenido matemático de las tareas con los antecedentes académicos de los estudiantes: Los estudiantes inscritos en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral procedían en su mayoría de un bachillerato tecnológico, habían cursado las asignaturas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

Resultados y discusión

Los elementos que se consideraron en el análisis son: a) la forma en que los estudiantes representan y explican a sus compañeros la tarea planteada; b) la identificación de los recursos matemáticos que los estudiantes emplean y, c) el análisis de la forma en que relacionan los recursos con la representación que utilizan.

En la primera etapa de la implementación, el profesor propuso a los estudiantes trabajar en forma individual durante algunos minutos. En la fase de exploración de los estudiantes, una constante fue utilizar la simetría del cuadrado para establecer relaciones entre las longitudes de los cuatro segmentos que lo forman (Figura 1).

Fig. 1. Trabajo exploratorio de los estudiantes A y B.

En la segunda etapa los estudiantes A y B explicaron a sus compañeros la forma en la que habían trabajado en la tarea. En los siguientes párrafos se presenta el trabajo realizado por cada uno de los estudiantes. Los paréntesis rectangulares, corresponden a comentarios del profesor-investigador.

Para el estudiante A la posición de la figura no representó ninguna dificultad, La representación gráfica favoreció que identificara la posibilidad de utilizar el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos del cuadrado, señaló que al tratarse de un cuadrado el triángulo que se forma es rectángulo.

> Estudiante A: Partiendo de los datos que nos dan, de que las diagonales coinciden con los ejes coordenados, tenemos que estos son los lados [señala el triángulo superior de trazo grueso que forma el cuadrado con el eje X]… entonces lo que nos piden es determinar las coordenadas de los vértices. Para eso, podemos formar un triángulo, y por teorema de Pitágoras tenemos catetos y tenemos una hipotenusa y el resultado iría así [determina en forma algebraica la longitud de la hipotenusa del triángulo] (Figura 2).

Fig. 2. Segunda construcción del estudiante A.

Con el valor que determinó y retomando de nuevo la simetría de la figura escribió las coordenadas de los vértices del triángulo.

Estudiante A: Llegamos a que el resultado de la hipotenusa es $\sqrt{128}$, eentonces esta sería la distancia desde el vértice hasta el otro vértice. Pero lo que nos pide es la coordenada, entonces a partir del cero de los ejes coordenados tenemos que determinar distancia entre dos. Y la primera coordenada es $\left(\frac{\sqrt{128}}{2},0\right)$ y para el de acá [señala el vértice izquierdo del cuadrado] es $\left(-\frac{\sqrt{128}}{2},0\right)$ {Escribe las coordenadas de los cuatro vértices] (Figura 3).

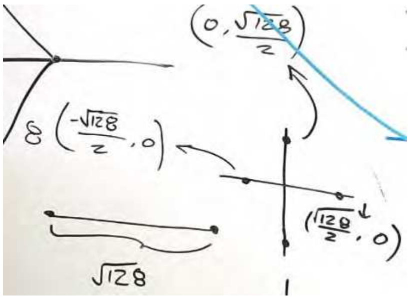

Fig. 3. El estudiante A determina las coordenadas solicitadas.

El estudiante B también utilizó la simetría de la figura, pero le pareció más conveniente modificar la posición de la misma. Preservando las propiedades del cuadrado, realizó una nueva construcción y a partir de ella determinó la longitud de una diagonal del cuadrado.

Estudiante B: yo primero, igual que A, vi que el cuadrado tiene ocho de lado y sus vértices están en los ejes, entonces lo moví [señala el cuadro] y lo puse sobre el eje x, de tal manera que tuviera ocho de largo y ocho de ancho y los ángulo rectos quedaran sobre los ejes. Y así puedo usar el teorema de Pitágoras [escribe el desarrollo] para obtener la medida de la hipotenusa [señala la diagonal del cuadrado] que mide $8\sqrt{2}$ (Figura 3).

Fig. 4. Segunda figura y desarrollo del estudiante B.

La segunda construcción realizada por el estudiante B, ayudó para que ganara confianza en el manejo de las relaciones, entre la figura inicial que dibujó, y la nueva construcción. Lo anterior se puedo constatar en el siguiente episodio, con la construcción de una tercera figura y la verificación que realiza para comprobar su conjetura. Aún cuando en la verificación omite un signo menos en la coordenada x de uno de los puntos, la explicación aporta evidencia de que entendía el procedimiento que debía realizar.

Estudiante B: entonces esto lo vamos a tener que dividir entre dos [señala la diagonal del cuadrado], porque es como si tuviéramos la diagonal de nuevo sobre el eje x [traza una tercera figura con el cuadrado en la posición inicial]. Entonces mide $8\sqrt{2}$ y la mitad es $4\sqrt{2}$ en cada lado [señala un segmento del origen a la izquierda y a la derecha]. Entonces determinamos que sus vértices van a estar en $4\sqrt{2}$ y $-4\sqrt{2}$ (Figura 4).

Profesor-investigador: ¿Lo puedes verificar? [El estudiante B escribe un procedimiento algebraico para verificar su resultado].

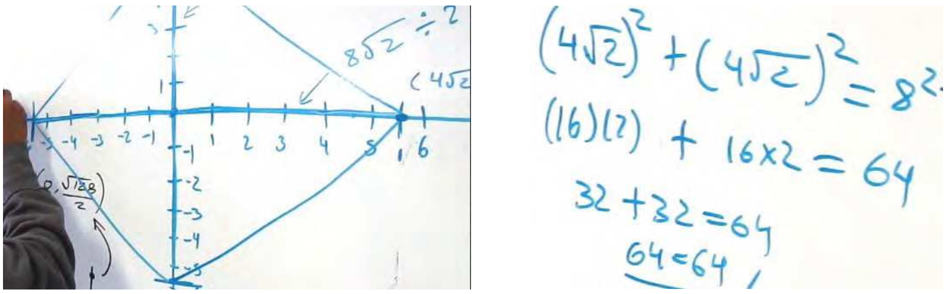

Fig. 5. Tercera figura y verificación realizada por el estudiante B.

Conclusiones

En relación con los factores que influyeron para que el alto nivel de demanda cognitiva de la tarea (procedimiento con conexiones) se mantuviera, es posible señalar que la posibilidad de representar el enunciado del problema mediante una figura incidió para que los estudiantes pusieran en práctica sus conocimientos previos: propiedades del cuadrado y el teorema de Pitágoras, lo que contribuyó para que cambiaran a la representación algebraica y resolvieran la tarea con éxito.

Fue posible identificar que la participación del profesor-investigador contribuyó para que la demanda cognitiva de la tarea se mantuviera. En la tarea analizada se identificó que el profesor-investigador solicitó al estudiante B (segunda etapa), que verificara su resultado, lo que ayudó para que el estudiante confirmara que había establecido en forma correcta las relaciones entre los datos del problema y para que mostrara a sus compañeros que su resultado era correcto. Lo anterior coincide con lo señalado por Torres, Reyes y Barrera (2011) quienes afirman que la formulación constante de preguntas a los estudiantes y la atención que se brinda a sus respuestas, orientan las acciones de los estudiantes hacia la búsqueda de relaciones, significados o explicaciones y fomentan la discusión con lo que se mantiene el alto nivel en la demanda cognitiva de una tarea.

En cuanto al diseño de la tarea, hay evidencia para afirmar que resulta fundamental considerar los antecedentes matemáticos con que cuentan los estudiantes y relacionarlos con los objetivos curriculares, ya que ambos son factores que inciden en el nivel de demanda cognitiva de una tarea.

Agradecimientos. Las autoras agradecen el patrocinio otorgado por la Comisión y Fomento a las Actividades Académicas [COFAA-IPN] y por la SIP del IPN (Números 20111060 y 20110397).

Referencias bibliográficas

Arbaugh, F. y Brown, C. (2004). What makes a mathematical task worthwhile? Designing a learning tool for high school mathematics teachers. En R. Rubenstein y G. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (pp.27–41) Reston, VA: NCTM.

García M. y Benítez A. (2011). Using Multiple Representations to Make and Verify Conjectures. *US-China Education Review 1*(3), 430-437.

Intersegmental Committee of the Academic Senates (ICAS), (2010). Statement of competencies in mathematics expected of entering college students. Recuperado el 10 de noviembre de 2011 de: http://icas-ca.org/competencies-in-mathematics.

Informe Final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007, *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina.* Recuperado el 16 de julio de 2011 de:

http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php.

Parnafes, O. y diSessa, A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning 9*, 251-280.

Ponce, L., Preiss D. y Núñez, M. (2010). Demanda cognitiva en la clase de matemáticas chilena, *Primer Congreso interdisciplinario de Investigación en Educación.* Recuperado el 10 de enero de 2012 de: http://www.ciie2010.cl/? page=view_programa_completo.

Proenza, Y. y Leyva, L. (2006). Reflexiones sobre la calidad del aprendizaje y de las competencias matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación* (40), 6, 1-11.

Schultz, K. (2009). *Cognitive Demand and Technology Use in High School, Selection and Implementation of task*. PhD University of Georgia Athens, Georgia.

Smith, M. &.Stein, M. (1998).Selecting and creating mathematical task: From research to practice*, Teaching mathematics in the Middle School 3*(5), 344-350.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M., y Silver, E. (2009). The mathematical task framework. *Implementing standards based mathematics instruction* (pp. 1-13). USA: NCTM.

Torres, A., Reyes, A. y Barrera, F. (2011). Procesos de diseño e implementación de tareas de aprendizaje matemático con alta demanda cognitiva. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas.* Recuperado el 11 de agosto de 2012 de: http://www.uaeh.edu.mx/sistema_investigacion/funciones/bajarArchivo_web.php?producto=3817&archivo=Torres-Reyes-Barrera-2011.pdf.