

## ORGANIZAÇÕES DIDÁTICAS, MATEMÁTICAS E PEDAGÓGICAS PROPOSTAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO

Elizabeth Fraccaroli Jammal, Marlene Alves Dias  
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN  
bethjammal@gmail.com, alvesdias@ig.com.br

Brasil

**Resumo.** Neste artigo apresentamos uma breve discussão sobre as relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio do Brasil. Trata-se de uma pesquisa documental e as análises são efetuadas via documentos oficiais elaborados e publicados a partir das propostas de mudanças indicadas na Lei de Diretrizes e Bases – LDB de 1996. As análises dos documentos oficiais indicam que se espera que os estudantes sejam capazes de resolver tarefas que representam situações e problemas matemáticos, de outras ciências e do cotidiano, reconhecendo os objetos matemáticos que permitam suas resoluções.

**Palavras chave:** organizações didáticas, matemáticas e pedagógicas. geometria

**Abstract.** In this article we present a brief discussion on the institutional relations expected, from the viewpoint of mathematical, didactical and pedagogical organizations, proposals for the teaching and learning of Analytic Geometry in high school in Brazil. This is a documentary research and analyses are performed by official documents prepared and published from the proposed changes set out in the Law of Guidelines and Bases (LDB) 1996. The analyses of official documents indicate that students are expected to be able to solve tasks that represent mathematical situations and problems, of other sciences and the everyday, recognizing the mathematical objects that allow their resolutions.

**Key words:** didactical, mathematical and pedagogical organizations. geometry

### Introdução

O presente estudo decorre de questionamentos advindos da prática escolar, da busca de compreensão das dificuldades enfrentadas por professores e estudantes e da perspectiva de encontrar meios para superar tais dificuldades em relação ao ensino e aprendizagem das noções de Ponto e Reta, na disciplina de Geometria Analítica, no Ensino Médio.

Busca-se para tanto fazer uma análise das expectativas nacionais das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio do Brasil via documentos oficiais. Escolhe-se assim analisar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio PCNEM, Brasil (2000), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais PCN+, Brasil (2006) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, São Paulo (2008).

A escolha desses documentos se deve ao fato de serem indicações construídas com a intenção de orientar o professor em sua prática diária e ajudá-lo a efetuar escolhas mais adequadas à realidade das classes e das regiões em que trabalham, isto é, desenvolver técnicas culturalmente possíveis.

Observa-se que uma relação didática se estabelece quando há um projeto de ensino com intenção de aprendizagem. Essa relação é construída por um conjunto de regras implícitas e explícitas que determinam as obrigações e as responsabilidades entre professor e estudantes, além de incluir um terceiro componente: o saber.

### Referencial teórico

Para identificar as organizações didáticas, matemáticas e pedagógicas escolhemos como ferramenta didática de análise a noção de “topos” do estudante e do professor conforme definição de Chevallard e Grenier (1997). O “topos” do professor ao iniciar uma relação didática é o de identificar meios de fazer emergir os conhecimentos do estudante de forma que ele os mobilize, em contextos distintos daquele em que aprendeu, para responder a uma determinada situação. O “topos” do estudante é o lugar no qual o mesmo tem a sensação de ter um papel na execução de suas tarefas, um papel que lhe é próprio.

Observa-se que Pedagogia e Didática são aqui tratadas do ponto de vista da didática francesa, ou seja, a Pedagogia é considerada como técnica e não como ciência; é vista como a arte de conduzir e organizar a classe. Já, a Didática está associada à aprendizagem disciplinar e à transposição do saber de uma determinada disciplina. Nesse sentido, a Didática se fundamenta sobre a própria Matemática e em suas questões específicas.

### Metodologia

Tendo em vista a fundamentação das análises propostas quando das relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio, o presente estudo foi iniciado a partir de uma prospecção dos trabalhos e pesquisas sobre a transição entre o Ensino Médio e Superior, em particular no ensino de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Trata-se de uma pesquisa documental para a qual foi efetuada uma análise de documentos oficiais na perspectiva de verificar quais as relações institucionais esperadas para a introdução das noções de ponto e reta no plano no Ensino Médio. Nestes documentos foram observados os “topos” do professor e dos estudantes, ou seja, qual o papel que se espera que professores e estudantes desempenhem no processo de ensino e aprendizagem.

### Resultados encontrados

As orientações encontradas nos documentos analisados apontam possibilidades para que os sistemas de ensino ou as escolas, a partir de um projeto pedagógico, apresentem novas alternativas de organização curricular mais comprometida com o mundo do trabalho, com a produção científica e o avanço tecnológico e a formação humana e intelectual do estudante.

Dessa forma, ao definir seu projeto pedagógico, a escola e a equipe escolar devem propiciar condições para que o estudante possa atingir os objetivos definidos na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996), tais como reconhecer os fundamentos básicos da investigação científica; reconhecer a ciência como uma atividade humana em constante transformação; consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental no intuito de garantir a continuidade de estudos, compreenderem os processos produtivos, preparar-se para o mundo do trabalho e para o exercício da cidadania, desenvolver uma sólida formação ética e desenvolver autonomia intelectual.

A análise das relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações matemáticas, didáticas e pedagógicas propostas para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio levam a considerar que, ao final do processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio, espera-se que os estudantes sejam capazes de resolver tarefas que representam situações e problemas matemáticos, de outras ciências e do cotidiano, reconhecendo os objetos matemáticos que permitam suas resoluções.

Apresenta-se a seguir uma breve síntese das relações institucionais esperadas do ponto de vista das organizações didáticas e pedagógicas dos documentos analisados.

#### *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9.394/96)*

O documento apresenta uma perspectiva de mudança para o ensino em todos os níveis em função das transformações sociais por que passa a sociedade e as novas características associadas às revoluções técnico/industrial e à informática. Para tanto, a Lei nº 9.394/96 define um currículo básico composto por uma base nacional comum complementada por uma parte diversificada associada às características regionais, culturais e econômicas que deve estar associada aos conhecimentos prévios dos estudantes. Esse mesmo documento destaca ainda, entre outros aspectos, a importância da educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência e propõe que se adotem metodologias de ensino e avaliação que estimulem a autonomia dos estudantes.

Conferindo uma nova identidade ao Ensino Médio, a Lei 9.394/96, indica que o Ensino Médio passa a fazer parte integrante da Educação Básica, na perspectiva de integrar numa mesma e única modalidade, finalidades até então dissociadas, ou seja, oferecer uma educação equilibrada de forma articulada. Essa perspectiva visa uma aprendizagem permanente, de forma continuada, tendo como foco central a construção da cidadania em função dos processos sociais que se modificam.

Dessa forma, no documento é ressaltado que o objetivo é dar ao Ensino Médio um caráter de formação geral ao indivíduo em oposição a uma formação específica. Além disso, especifica-se que o currículo deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que permitam ao estudante desenvolver competências e habilidades básicas essenciais para a realização de atividades na vida em sociedade e nos meios de produção, isto é, do ponto de vista didático deve-se optar por conteúdos que possam servir para o progresso e crescimento pessoal e intelectual dos estudantes e do ponto de vista pedagógico visa-se desenvolver estratégias que possam servir para a formação para o trabalho e para o desenvolvimento da cidadania.

Assim, com a criação da Lei nº 9.394/96, buscando construir uma proposta nacional para a escola, foi elaborado uma série de documentos que apresentam parâmetros norteadores para o trabalho das disciplinas.

#### *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM, Brasil (2000), apresentam uma reforma curricular fundamentada nas mudanças do conhecimento e seus desdobramentos quando se consideram as relações sociais e o mundo do trabalho. Estabelecem orientações para o currículo das disciplinas em cada ciclo a partir dos quais a escola pode desenvolver seu próprio projeto pedagógico. Eles expressam o empenho em apresentar ideias do "que se quer ensinar", "como se quer ensinar" e "para quem se quer ensinar", dando um caráter genérico dos objetivos, conteúdos, avaliações e orientações pedagógicas.

No que concerne à metodologia de ensino, o documento descreve que o importante é que haja a troca de experiências entre professor e estudante, sendo que neste momento de troca de informações o professor não terá atitudes diretivas, mas terá uma conduta relacional, a qual permite ao estudante criar, experimentar, relacionar. Essa nova proposta de trabalho está associada ao "topos" pedagógico esperados do professor e do estudante, que deverão trabalhar como uma equipe trocando experiências.

Isso permite considerar que, quanto ao "topos" pedagógico proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Brasil (2000), é enfatizado a formação geral do estudante e o desenvolvimento de sua capacidade para formular problemas e soluções, pesquisar, selecionar e analisar informações ao invés de memorizá-las. Sendo assim, cabe ao professor propor situações que propiciem o desenvolvimento desse tipo de "topos" e ao estudante de aceitá-las e desenvolvê-las.

### *Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais*

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais, PCN+, Brasil (2006), têm como objetivo delinear as metas para o ensino das disciplinas do Ensino Médio no Brasil e sugerem uma organização curricular do Ensino Médio, tendo como suporte a interdisciplinaridade e a contextualização. Apresentam estratégias metodológicas como exemplos que relacionam conteúdos e competências e são dadas opções que proporcionam um trabalho com projetos interdisciplinares.

### *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*

Fundamentada nas mudanças sociais que impulsionaram mudanças na Lei de diretrizes e Bases, LDB, Lei 9.394/96, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, DCNEM, Resolução nº 03/98 e nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Brasil (2000), a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, São Paulo (2008), leva em conta a complexidade cultural, as dimensões sociais, econômicas e políticas e a diversidade de produtos tecnológicos e científicos e de linguagens e códigos que compõem o cotidiano do cidadão e cuja não apropriação pode corresponder à exclusão social.

O documento propõe um currículo que desenvolva competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais. Para tanto é construído material (caderno do professor e do aluno) específico para professores e estudantes que orienta a gestão e auxilia o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula.

Feitas as considerações acima, apresenta-se um breve resumo dos resultados encontrados quanto às organizações didáticas, matemáticas e pedagógicas nos documentos analisados.

Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCNEM, Brasil (2000): a organização pedagógica enfatiza a formação geral do estudante e o desenvolvimento de sua capacidade para formular problemas e soluções, pesquisar, selecionar e analisar informações ao invés de memorizá-las. Cabe assim ao professor propor situações que propiciem o desenvolvimento dessa organização.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio Nacionais, Brasil (2006):

- ❖ Do ponto de vista pedagógico encontramos exemplos de estratégias metodológicas.
- ❖ Do ponto de vista didático são consideradas opções para a construção de projetos que associam conteúdos da própria matemática e das outras ciências.

Proposta Curricular do Estado de São Paulo, São Paulo (2008):

- ❖ Organização didática: Os conteúdos são organizados por bimestre e disciplina.

- ❖ Organização pedagógica: definição das habilidades e competências, seguidas de orientações para gestão da sala de aula, avaliação e recuperação, bem como sugestões de métodos e estratégias de trabalho nas escolas.
- ❖ O Caderno do Professor apresenta-se como um manual prático de pedagogia e didática, trazendo o quê e como ensinar.

Em relação ao conteúdo matemático encontramos as seguintes orientações.

Orientações encontradas quanto à Organização Matemática da Geometria Analítica

Nos documentos oficiais analisados observa-se uma proposta de um conjunto de três eixos estruturadores que possibilitam a seleção de temas que promovam o desenvolvimento de uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos e que tenham uma relevância científica e cultural garantindo maior significação para a aprendizagem.

- ❖ Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas. Isso corresponde à manipulação dos ostensivos e a evocação dos não ostensivos associados. Por exemplo, qual é equação da reta  $r$  da figura?

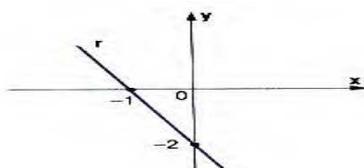


Figura 1: Representação de uma reta no plano cartesiano.

- ❖ Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação problema. Por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medir diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema por meio da geometria analítica.
- ❖ Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas ou conceito de distâncias na geometria analítica, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas ou estudo de retas na geometria analítica.

- ❖ Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades. Por exemplo, no estudo das diferentes representações de uma reta em Geometria Analítica, estabelecer os métodos que permitam a passagem de uma representação à outra.
- ❖ Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, observar que a representação cartesiana de uma reta no plano é dada por uma única equação, enquanto que uma representação paramétrica é dada por apenas um parâmetro.
- ❖ Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou um sistema de equações lineares, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções.
- ❖ Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas. Por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de figuras no plano cartesiano.
- ❖ Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações. Por exemplo, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições.
- ❖ Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. Por exemplo, associar os conhecimentos desenvolvidos em Geometria Analítica com os de Álgebra Linear. Outro exemplo corresponde a relacionar a noção de função afim com a equação de uma reta no plano.

Exemplo: Técnica da Representação na Forma Reduzida e Representação Funcional de uma Reta

Sejam  $A(2, 1)$  e  $B(1, 3)$  pontos pertencentes a uma reta  $r$ .

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma única reta (axioma da geometria euclidiana). Dessa forma, considerando um ponto e calculando a declividade da reta  $r$ , pode-se determinar sua representação na forma reduzida.

Dados dois pontos tais que  $x_1 \neq x_2$ , pode-se concluir que se trata de uma reta não vertical, logo existe uma função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . Como o gráfico de  $f$  é uma reta que passa pelos pontos A e B conclui-se que essa reta coincide com a reta  $r$  procurada.

Nesse caso, como a taxa de variação da função afim  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  coincide com o

coeficiente angular  $m$  da reta  $r$ , temos:

$$a = m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo, dado um ponto  $(x_0, y_0)$  e conhecida a declividade da reta  $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$  determina-se sua

representação na forma reduzida, isto é,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Para o caso particular considerado a declividade de  $r$  ou o coeficiente angular de  $r$  é dado por

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ então } m = \frac{3 - 1}{1 - 2}, \text{ logo } m = -2.$$

Considerando A (2, 1) como um dado ponto de  $r$ , P(x, y) um ponto qualquer de  $r$  e  $m = -2$ .

Substituindo A e  $m$  na representação da reta na forma reduzida:

$y - y_0 = m(x - x_0)$ , temos:

$$y - 1 = -2(x - 2).$$

Efetuada as operações indicadas encontra-se  $y = -2x + 5$  que é representação funcional da reta  $r$  e quando  $f(x) = -2x + 5$  é a função afim cujo gráfico é uma reta não vertical.

Observa-se aqui que a tecnologia utilizada para determinar a representação da reta na forma reduzida é descrita, explicada e justificada por meio do axioma da geometria euclidiana, a saber, dois pontos distintos determinam uma única reta, da noção de reta não vertical e das noções de função afim e gráfico da função afim.

Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2000) prova as afirmações: “Dados arbitrariamente  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , com  $x_1 \neq x_2$ , existe uma, e somente uma, função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ .” e “Toda reta não vertical  $r$  é o gráfico de uma função afim.” (Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado, 2000, p.90-91)

- ❖ Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma

determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos distintos.

### Considerações finais

A análise desses documentos mostrou, inicialmente, existir uma preocupação institucional nacional em mudar as condições de ensino e aprendizagem no Ensino Médio.

Os documentos apontam para uma nova organização curricular comprometida com o mundo do trabalho, além da produção científica, do avanço tecnológico, da formação humana e intelectual do estudante, descaracterizando, desta forma, o por eles descrito como “ensino tradicional”, isto é, descontextualizado, compartimentado e baseado no acúmulo de informações.

Do ponto de vista da organização pedagógica são dados exemplos de métodos e estratégias para auxiliar o professor na elaboração do seu plano de ensino e do ponto de vista da organização didática são sugeridos os conteúdos matemáticos e o trabalho interdisciplinar e contextualizado.

Do ponto de vista da organização didática da Geometria Analítica é indicado o estudo das retas no plano e retas e planos no espaço contemplando o estudo dos vetores, isto é, não se restringindo apenas à representação desses objetos matemáticos por meio de um conjunto de equações lineares.

Mas, quando se consideram as articulações e os diferentes níveis de tratamento das noções de ponto e retas no plano não existem exemplos precisos para esse trabalho, mesmo se a proposta é que se articulem os conhecimentos matemáticos na própria matemática, nas outras ciências e no contexto de vida dos estudantes, esse trabalho é deixado completamente a cargo dos professores.

É importante ressaltar que os conhecimentos que os estudantes precisam mobilizar quando se introduz novas noções são fatores, muitas vezes, desconhecidos dos professores, tanto do Ensino Médio como do Ensino Superior. Portanto, para que os professores possam realizar a tarefa que lhes é atribuída, isto é, trabalhar com situações contextualizadas em diferentes contextos é preciso que os mesmos disponham de materiais que auxiliem esse trabalho.

### Referências bibliográficas

- Brasil (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio – Parte I: Bases Legais*. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Brasil (2006). *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Chevallard Y. et Grenier, D.(1997). Le topos de l' élève. En *Actes de la IX école d' été de didactique des mathématiques deHoulgate* (pp. 35-38). Houlgate: Association de Recherche en Didactique des Mathématiques.
- Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2000). *A Matemática do Ensino Médio*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.
- São Paulo (2008) *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas.