PROPUESTA DE INNOVACIÓN: POTENCIA DE UN PUNTO EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA

Daniela Bonilla Barraza
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
yodbb1@yahoo.es

Resumen. La propuesta de innovación surge por las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la geometría proporcional, en particular, en la propiedad Potencia de un punto exterior a la circunferencia.Para su diseño se considera como referente teórico, la articulación propuesta por Montoya (2010), complemento entre "Paradigmas geométricos" de Houdement y Kuzniak y los Procesos de Pruebas de Balacheff. En base a antecedentes obtenidos de un estudio epistemológico del objeto, se diseñan distintas pruebas que propician el tránsito entre los paradigmas de la geometría natural (GI) y la geometría axiomática natural (GII) , aportando así en el aprendizaje de la propiedad en estudio.

Palabras clave: paradigmas geométricos, procesos de prueba, igualdad de áreas

Abstract. The proposed innovation arises from the students' difficulties in learning geometry proportional, in particular, on the property of a power point outside the circunferencia.Para its design is considered as a theoretical reference, the joint proposal by Montoya (2010), complement between "geometric Paradigms" of Houdement and Kuzniak and Balacheff testing processes. Based on records obtained from an epistemological study of object, different tests are designed to foster the transition between the paradigms of natural geometry (GI) and Natural axiomatic geometry (GII), thus contributing to the learning of the property under consideration.

Key words: geometric paradigms, testing processes, equal areas

Descripción de la problemática

En Chile, el eje que presenta mayor dificultad en su aprendizaje es la geometría, esto se refleja en la mediciones nacionales, por ejemplo: En la prueba de selección universitaria donde "geometría presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de respuestas omitidas " (proceso de admisión 2012 documento n°13,2011, p.3). El currículum de la asignatura de matemática, considera al razonamiento, como un pilar fundamental en el proceso de aprendizaje, entendido como: "La capacidad para resolver problemas, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones, razonar bajo hipótesis"(fundamentos ajustes curricular de educación matemática, 2009, p.2). Sin embargo, el tratamiento del objeto, potencia de un punto exterior a la circunferencia, dista de lo anterior, puesto que se propone que los estudiantes demuestren esta propiedad, sin realizar previas conjeturas.

En general la propiedad se convierte en una "fórmula" para calcular medidas de segmentos a través de las ecuaciones.

Tanto en el programa de estudio como en los textos escolares, se plantea una única forma de probar la propiedad, a partir de relaciones de semejanza de triángulos, cabe destacar que no se exhiben actividades donde los estudiantes puedan deducir relaciones entre trazos y determinar en forma empírica la veracidad de las propiedades.

Antecedentes

El objeto Potencia de un punto exterior a una circunferencia, se ubica en el programa de segundo año medio (14- 15 años) en la unidad “Sobre las Circunferencias y sus Ángulos”, con el fin de desarrollar un contenido específico: distinción entre hipótesis y tesis.

Las actividades (figura 1) limitan el trabajo del aprendiz a escribir solo las proporciones que derivan de la semejanza de triángulos para llegar a establecer que los productos son constantes.

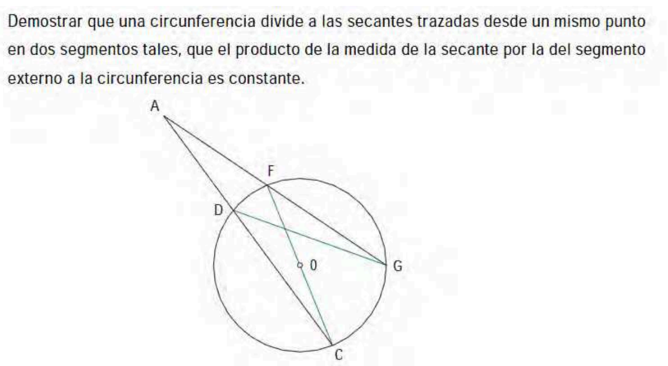


Figura 1: Ejemplo de actividad (Ministerio de Educación, 2004, p.89)

Los textos escolares, muestran ejemplos de demostraciones de las propiedades (figura 2), y una vez obtenida la relación es utilizada en el cálculo de medidas de segmentos a través de las ecuaciones (figura 3).

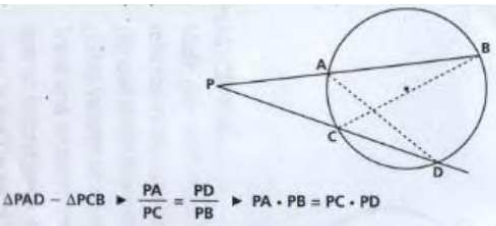


Figura 2: ejemplo de demostración
(Baeza, García, & Villena, 2005)

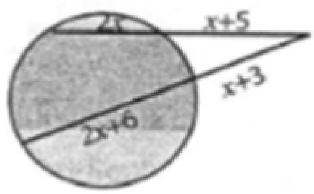


Figura 3: Cálculo de medidas de segmentos
(Cid Figueroa, 2008)

Consideramos que el enfoque algebraico que predomina en los textos escolares, y las demostraciones mostradas en el programa de estudio no son suficientes para alcanzar un razonamiento en torno a la propiedad en estudio.

Estudio epistemológico

A continuación se presentan dos etapas importantes en la evolución del objeto matemático en estudio, que serán considerados para el diseño de la secuencia.

El concepto potencia de un punto exterior a la circunferencia ha evolucionado a través de la historia de la matemática, hace su primera aparición en los elementos de Euclides en el año 300 a .c, como una proposición relacionada a la circunferencia, la demostración se basa en la igualdad de áreas de rectángulos y cuadrados.

Posteriormente el concepto de potencia de un punto exterior a la circunferencia es introducido por el matemático Jacob Steiner en el desarrollo de la geometría proyectiva. Este enfoque asocia un valor determinado a la potencia de un punto independiente de la recta, el valor varia si el punto es exterior, interior o está en la circunferencia.

La potencia de un punto P respecto a una circunferencia de radio r es igual a la cantidad $|d^2 - r^2|$, donde d es la distancia del punto P al centro de la circunferencia.

A partir del siglo XX, el objeto potencia de un punto adquiere variadas interpretaciones en distintas áreas de estudio. Actualmente es tratado en los programas oficiales de nuestro país, como una propiedad de las rectas secantes en la circunferencia, que se prueba a partir de triángulos semejantes, donde se pretende que los aprendices conjeturen y demuestren la propiedad, y luego la apliquen en el cálculo de medidas de segmentos.

Marco teórico

El diseño de la propuesta de innovación del objeto matematico "Potencia de un punto exterior en la circunferencia", considera elementos del marco teórico : Paradigmas y Espacio de trabajo geométrico , propuesto por Houdement y Kuzniak (2000, 2006) y los procesos de prueba de Balacheff (1987).

Houdement y Kuzniak identifican tres paradigmas que estan presentes en la enseñanza de la geometría, y cuya función es permitir que el estudiante construya su propio espacio de trabajo geométrico guiado por el docente, estas son: Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Geometría Axiomática formalista (GIII).

Algunas características de los paradigmas GI y GII

En la geometría natural(GI) , está permitido el juego permanente de ir y volver entre el referente teórico y la realidad, no está presenta la axiomática formal de la geometría de Euclides. Se puede comprobar empíricamente las afirmaciones, los medios de prueba son de tipo material, se permite medir con instrumentos , trabajo con pliegues , cortes .. etc.

La Geometría Axiomática Natural(GII), requiere abstracción de la figura geométrica que es descrita por las propiedades. Se utiliza una parte del referente teórico(axiomática de Euclides). El uso de artefactos como medio de prueba no está permitido, sólo son usados para construcciones geométricas.

Balacheff (Balacheff, 1987) distingue dos tipologías de pruebas, pragmáticas e intelectuales. Las pruebas pragmáticas son aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y supone la posibilidad de tener acceso a realización material de una tarea para justificar afirmaciones sobre ellos. Estas son : Empirismo ingenuo, Experimento crucial y ejemplo genérico. Las pruebas intelectuales provienen de una forma particular de razonar, donde se articulan argumentos, cadenas de argumentos, con una clara producción en una lengua simbólica, sin hacer uso de los objetos materiales. Estas son : Experimento mental, demostración, cálculo sobre el enunciado.

Descripción de la propuesta de innovación

La propuesta busca que los estudiantes comprendan la potencia de un punto exterior a la circunferencia, a través del tránsito entre los paradigmas GI y GII, lo que conlleva al paso de pruebas pragmática a intelectuales.

Se presenta un extracto de las actividades propuestas fundamentadas en el marco teórico.

Secuencia de aprendizaje

Actividad 1: Dada una circunferencia y un punto P exterior a ella (figura 6), determine, si es posible, un segmento de recta secante que pase por el punto P y corte a la circunferencia en dos puntos, donde el producto entre la medida del segmento exterior (PA) y el segmento total (PB) sea el máximo.

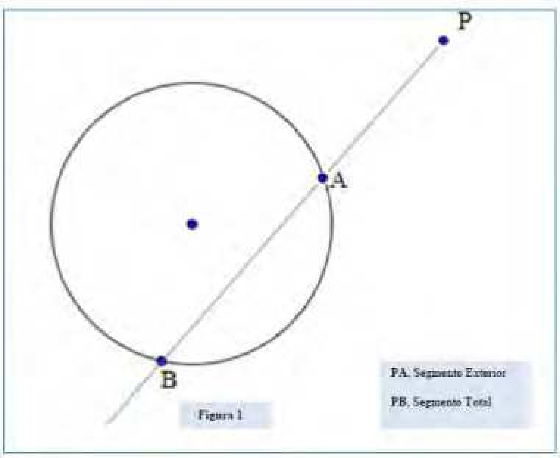
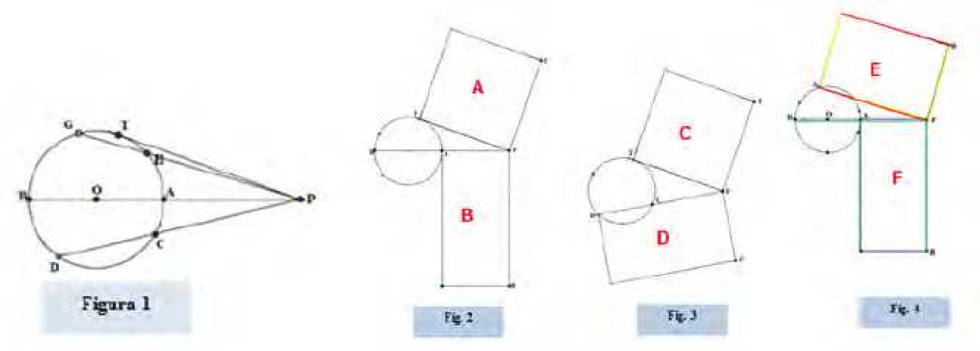


Figura 1

a) Trace rectas secantes desde el punto P a la circunferencia, realice las mediciones de los segmentos exteriores y segmento total, calcule el producto entre la medida de ellos *b) ¿Cómo son los productos obtenidos?*

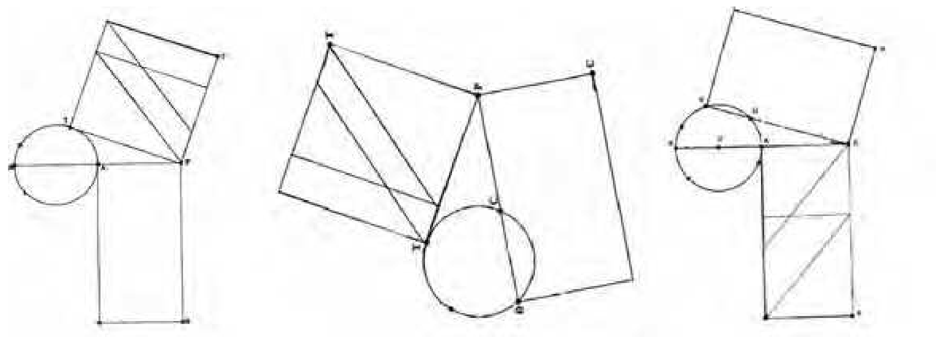
c) Exponga los resultados en el curso, argumentando su conjetura.

Actividad 2: A partir de la figura 1, se generan rectángulos y cuadrados, como se muestran en las figuras 2 ,3 y 4.



Considerando los segmentos marcados en la circunferencia de la figura 1 y la construcción presentada en la figuras 2, 3 y 4.Explica, ¿Cómo son las áreas de los polígonos que se forman en cada una de las figuras?

2) A continuación se presentan figuras donde se ha construido un puzzle, a través de la experimentación pruebe si se cumple la conjetura prevista.



a) ¿Cómo son las áreas de los polígonos de la figura?

b) Escribe una expresión donde se verifique la relación de las áreas de los polígonos.

c) ¿Cómo son los productos entre los segmentos exteriores a la circunferencia y los segmentos totales? Fundamente a partir de lo experimentado

Análisis de las actividades 1 y 2

Las actividades 1 y 2 se enmarcan dentro del paradigma de la geometría natural(GI), los objetos son representados por dibujos (líneas,puntos ,círculos,rectángulos, cuadrados,entre otros) los cuales son manipulados, la tipología de pruebas es de tipo pragmática.

En la actividad 1 está presente el empirismo ingenuo, el estudiante realiza mediciones para establecer una conjetura, se basa en la experimentación para validar sus conclusiones.

La componente cognitiva visualización genera en el aprendiz imprecisiones (puede pensar que la recta que pasa por el diametro es la de mayor producto), por lo tanto ,no es suficiente para deducir conclusiones , sino , que necesita de otras componentes, como son las pruebas.

En la actividad 2 , el tipo de prueba es " ejemplos genéricos", los estudiantes justifican la afirmación considerando los casos como representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación. La visualización, en la formación de los rectángulos y cuadrados permite generar posibles predicciones, en relación a la posibilidad de equivalencia en el valor de las áreas, en este punto la manipulación de los objetos a través del armado del puzzle , como prueba , permite verificar la igualdad de áreas(figura7)

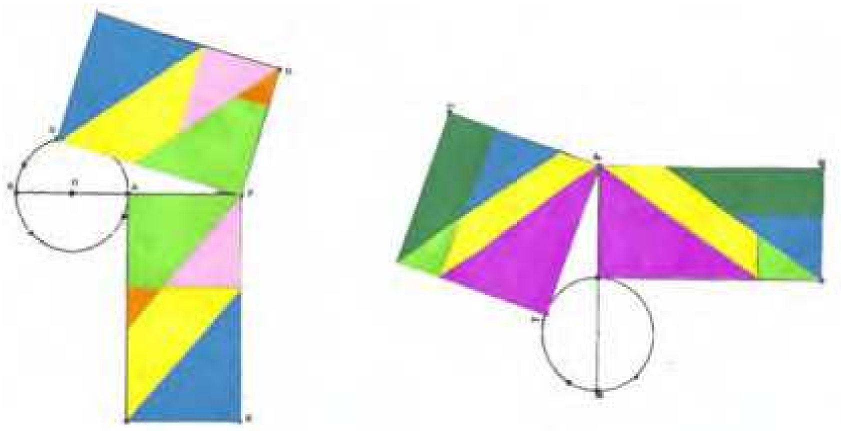


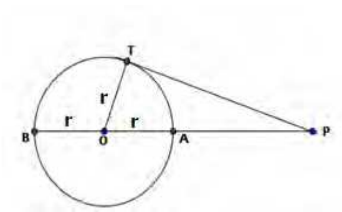
Figura 4: igualdad de áreas

Actividad 3

Sea P, un punto exterior a la circunferencia de centro O y radio r, T punto de tangencia a la circunferencia. Llamaremos d a la distancia desde el punto P al centro de la circunferencia.

Pruebe que $\overline{PT} \cdot \overline{PT} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Sugerencia: Escriba en función de d y r los siguientes segmentos PO, PA, PB.



Análisis de la actividad 3

Esta actividad se encuentra en el paradigma de la geometría axiomática natural (GII), tiene por objetivo validar las propiedades encontradas en las actividades anteriores, a través de un razonamiento hipotético deductivo, donde se considera la axiomática de la geometría euclidiana como referente teórico. El proceso de prueba es de tipo intelectual, en particular, experimento mental, el razonamiento del sujeto se independiza de la representación del objeto, se observa un guión que no tiene necesariamente la estructura de una demostración. Se pretende que los estudiantes a través de relaciones geométricas, como, el teorema de

Pitágoras, determinen la expresión $|d^2 - r^2|$ para la potencia de un punto exterior a la circunferencia, donde d es la distancia desde un punto P exterior a la circunferencia al centro O de ella y r es el radio de la circunferencia.

Reflexiones finales

Se sugiere la aplicación de la propuesta de innovación, a estudiantes que se inician en el estudio de propiedades geométricas (14- 15 años), es importante iniciar con pruebas de tipo pragmáticas, donde se privilegia un razonamiento deductivo (GI) , para luego dar paso a pruebas intelectuales, donde se potencia un razonamiento hipotético – deductivo (GII). Siendo el tránsito entre los paradigmas GI y GII clave para propiciar el desarrollo del razonamiento matemático.

El diseño expuesto, acerca a los estudiantes a la concepción de demostración, en el sentido de Balacheff. Claramente para alcanzar este nivel de razonamiento es necesario intencionar el tránsito de GII a GIII.

Es fundamental promover la comprensión del objeto matemático, potencia de un punto en la circunferencia, independiente de la posición del punto. El cual se relaciona directamente con elementos presentes en el diseño, como, el valor de la potencia de un punto exterior a la circunferencia.

Referencias bibliográficas

Baeza, A., García, M., y Villena, M.(2005). *Texto del estudiante Segundo año medio*. Santiago: Santillana del pacífico

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematiques, 2*, 147-176.

Cid, E. (2008). *Texto del estudiante Segundo año medio*. Santiago: Cal y canto

Houdement, C., y Kusniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géómétrie. *Annales de didactique des mathématiques et des sciences cognitives 11*, 175-216.

Houdement, C., y Kuzniak, A. (2000). Formation des maitres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*(1), 175-216.

Ministerio de Educación , Unidad de curriculum y evaluación.(2004). *Matemática programa de estudio Segundo Año Medio*.Santiago:Mineduc.

Ministerio de Educación, Unidad de curriculum y evaluación (2009). *Fundamentos del ajuste curricular en Matemáticas*.Santiago: Mineduc .

Montoya, E. (2010). *El Razonamiento en Matemáticas*. Valparaíso: Pontificia Universidad católica de Valparaíso.

Proceso de admisión 2012 documento n°13. (2012).(sf).Recuperado el 05 de octubre de 2011 de http://www.demre.cl/text/publicaciones2012/septiembre/publicacion16 (29092011).pdf.