# ALGUNAS DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON DERIVADAS

Noelia Londoño Millán, Alibeit Kakes Cruz, Victoria Guadalupe Decena García
Universidad Autónoma de Coahuila México
noelialondono@uadec.edu.mx

**Resumen**. A través de este documento se dan a conocer los resultados parciales encontrados en un estudio realizado a estudiantes de primer año de licenciatura, siendo el objeto central indagar acerca de las dificultades que presentan en la resolución de problemas en el área de las matemáticas, los que se podrían resolver usando la derivada. Para esta parte de la investigación se diseñó y aplicó un diagnóstico el cual contenía cuatro problemas referidos a: graficación de funciones, extremos de funciones, funciones por ramos y tangente a una curva. El análisis de resultados deja ver cómo a pesar de haber cursado y aprobado el curso de cálculo I (cálculo diferencial) y llevado un 80% el curso de cálculo II (cálculo integral), muy pocos alumnos logran utilizan la derivada como una herramienta para solucionar los problemas propuestos.

**Palabras clave**: problema, derivada, estrategias, recursos

**Abstract**. Through this document disclosed partial results found in a study of freshmen graduate, being the central object inquire about the difficulties encountered in solving problems in the area of mathematics, which could be solved using the derivative. For this part of the research was designed and applied a diagnosis which contained four problems related to: graphing functions, features extremes, functions by classes and tangent to a curve. Analysis of results reveals how despite having taken and passed the course of Calculus I (calculus) and led to 80% during calculation II (integral calculus), very few students attain the derivative used as a tool to solve the proposed problems.

**Key words**: problem, differential, strategies, resources

## Introducción

En matemáticas, la derivada es un tema obligado en el diseño curricular de todos los programas de cálculo I (cálculo diferencial), de cualquier ingeniería, licenciatura en matemáticas, física o afines, por considerarse una herramienta importante, y es tarea del docente universitario enseñar los conocimientos, desarrollar las habilidades y fortalecer las aptitudes de los estudiantes de nivel licenciatura, para que el alumno tenga un panorama más amplio a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas.

Es de dominio público que existe un universo de dificultades en el dominio de las matemáticas en general y el uso de la derivada en particular, para la resolución de problemas en varios contextos. El reporte de investigación que se presenta a continuación contiene resultados respecto a la problemática que presentan los estudiantes en la resolución de problemas en un contexto puramente matemático, y que para resolverlos era necesario contar con algunos conocimientos teóricos como las reglas de derivación, identificar funciones por tramos, interpretación geométrica de la derivada, criterio de la primera y segunda derivada, ente otros.

De manera general el documento contiene el referente teórico usado en la investigación, también aparece la metodología, en la cual se especifican las características de los procesos seguidos para llevar a cabo la investigación, en ella se describen los instrumentos aplicados, así como también, las características de los participantes en el momento de la aplicación. En otro apartado se desarrolla la discusión de los resultados en el cual se hace un análisis cuantitativo y cualitativo, para luego obtener las conclusiones, mostrando por último las referencias bibliográficas que se tuvieron en cuenta durante el desarrollo de la investigación.

## Referente teórico

Las reformas educativas recientes que se han realizado, no solo a nivel de México sino a nivel del mundo coinciden en incluir la resolución de problemas como una fuente importante de conocimiento y aprendizaje de las matemáticas. A este respecto Schoenfeld (1992) se refiere a la resolución de problemas matemáticos como una tarea no tan simple para el individuo que aspira realizarla, es decir, una tarea que requiere algún grado de dificultad, lo que representa al menos un obstáculo y donde la sencillez no se vislumbra en la solución de dicho problema.

Para esta investigación se tuvo en cuenta la teoría de resolución de problemas Schoenfeld (1992) y Polya (1965), por un lado el dominio de conocimientos sobre derivadas, específicamente las reglas de derivación, entender el concepto de función derivable, identificar extremos de una función, etc. Y en lo que respecta a estrategias heurísticas se prestó atención especial a las siguientes: hacerse preguntas respecto a la incógnita, hacer una gráfica, enunciar el problema de manera diferente y particularizar.

## Metodología

En este apartado se incluye una pequeña descripción de las personas participantes en el estudio, las características del instrumento, así como también las condiciones bajo las cuales fue aplicado.

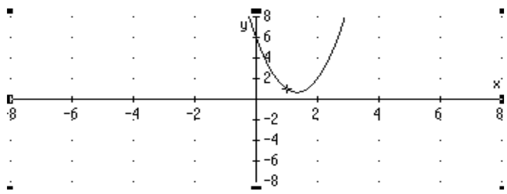
*Participantes en el estudio*. En el estudio participaron 14 estudiantes de licenciatura, cuyas edades estaban entre los 17 y 19 años, en el momento de aplicación (mayo de 2011), los alumnos estaban terminando el primer año de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila.

*Acerca del instrumento*. La información fue recabada a través de un diagnóstico el cual fue diseñado con el objetivo de indagar sobre la resolución de problemas en el contexto puramente matemático. Antes del diseño se consultó el programa oficial de la asignatura de cálculo I, de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, el cual incluye en una de sus unidades el estudio del concepto de derivada y sus aplicaciones, "Unidad IV: Derivada de una función (reglas de derivación), derivadas de orden superior, derivación implícita, aplicaciones (utilizando la computadora en la resolución de problemas planteados).” (Facultad de ciencias físico matemáticas, 2010, p. 73). También se hizo una revisión bibliográfica de algunos textos que se sugieren en el programa oficial de cálculo I, Anton (1991), Leithold (1999), etc. y que estaban a disposición de los alumnos en la biblioteca de la facultad y la infoteca central.

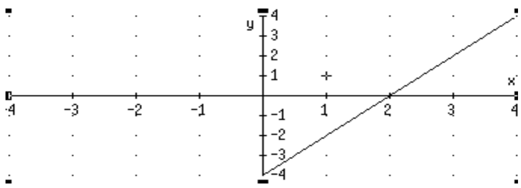
Del mismo modo se indagó con los alumnos de licenciatura en matemáticas aplicadas (de segundo a octavo semestre) que habían llevado cálculo diferencial, acerca de temas de derivadas que habían visto y en la investigación sólo se incluyeron los temas que tuvieron mayor frecuencia como extremos en un intervalo, funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada, concavidad de un a función y el criterio de la segunda derivada, así como también análisis de gráficas y problemas aplicados a máximos y mínimos.

Teniendo en cuenta lo anterior se procedió a diseñar el instrumento el cual estuvo conformado por cuatro problemas a saber: El primero se refiere a la gráfica de una función, el problema consta de un enunciado y cuatro opciones de respuesta, siendo la opción a, la respuesta correcta. La dificultad de este problema radica en que la curva que debían seleccionar correspondía a la derivada de la función, y no al revés como están acostumbrados los alumnos.

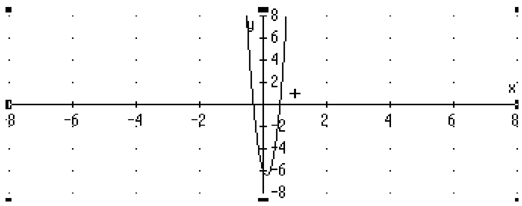
Problema 1. Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ la gráfica de su derivada es:



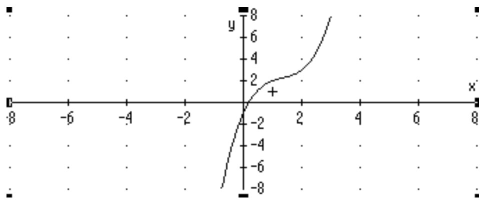
a)



b)



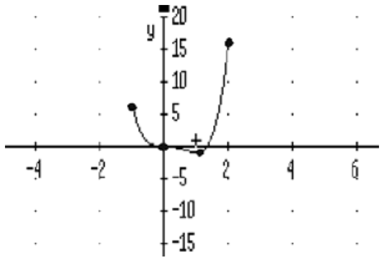
c)



d)

Para el segundo problema se averiguó por los extremos de una función polinómica, en un intervalo, conocida la función y su respectiva gráfica.

Problema 2. Hallar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1,2]$.




Un tercer problema planteado se refiere a un concepto clave en cálculo: ser diferenciable, la tarea del estudiante consistió en construir una función (definida por tramos) que sea derivable. Este problema pone al estudiante en una situación poco usual, ya que lo normal es darle la función para que el alumno  la derive y generalmente continúa y en una sola expresión. Cabe mencionar que este problema tres es similar al planteado por Selden et al. (1999), con algunas modificaciones.

Problema 3. Para qué valores de a y b es derivable la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & si\ x < 0 \\ ax + b, & si\ x \geq 0 \end{cases}$

El cuarto problema se refiere a la interpretación geométrica de la derivada, dada la ecuación y algunos puntos de la misma.

Problema 4. Halla los coeficientes de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ sabiendo que su gráfica pasa por (0,3) y por (2,1) y en este último punto, su recta tangente tiene pendiente 3.

Luego que los alumnos solucionaron cada problema se solicitó  que elaboraran una lista con las estrategias y los conocimientos que utilizó para resolver cada problema.

Sobre las condiciones de aplicación. Todos los alumnos participantes habían cursado y aprobado el curso de cálculo I, esto porque para solucionar los problemas era necesario contar con algunos conocimientos teóricos respecto a la derivada como como: concepto de función derivable, grfica de la función, interpretación geométrica, reglas de la derivación. Las respuestas dadas fueron de forma individual,  ya que deseaba conocer sobre la resolución de problemas de cada alumno. El tiempo utilizado fueron dos horas clase por problema, aunque hubo alumnos que emplearon menos tiempo. A los alumnos se les informó que las respuestas que dieran no iban a ser evaluadas en ninguno de los cursos que estaban llevando en el semestre.

## Análisis de resultados

Los resultados obtenidos fueron analizados desde el aspecto cuantitativo y cualitativo. En cuanto al primer aspecto se clasificó la información en respuestas correctas, si cumplía con lo solicitado en cada pregunta, sin importar el método utilizado por el estudiante; respuesta incorrecta si había solución y ello no correspondía a la pregunta y la opción no contestó, para aquellos que dejaron el espacio en blanco, o simplemente expresaron no poder hacerlo.

A continuación se muestra una tabla general con los porcentajes de los resultados obtenidos por pregunta.

| Problema | Correcto | Incorrecto | No Contestó |
|---|---|---|---|
| 1 | 64% | 36% | 0% |
| 2 | 28% | 36% | 36% |
| 3 | 0% | 50% | 50% |
| 4 | 7% | 64% | 29% |

Tabla 1. Resultados por problema del desempeño de los alumnos.

Al analizar los resultados de forma cualitativa se observa un aceptable desempeño 64% en la pregunta uno, la cual involucra la gráfica de la función derivada. La mayoría de los alumnos aplicó de manera correcta las reglas para la primera derivada, de una función polinómica, de grado tres: *si* $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$, entonces su primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 6$, la dificultad mayor en esta pregunta, residió en que los alumnos no tuvieron la habilidad de seguir derivando para encontrar el comportamiento de la función $f'(x)$ y hallar sus características, lo único que hicieron fue elegir una de las dos funciones que tuvieran comportamientos cuadráticos y el 36% incurrieron en el error de elegir la opción c como respuesta correcta.

Luego de todo el proceso vale la pena preguntarse ¿se hubieran obtenido los mismos resultados si en las opciones de respuesta aparecieran únicamente funciones cuadráticas?

Para el segundo problema donde se pedía los extremos de la función en un intervalo, el 36% de los alumnos se limitó a responder solamente usando la gráfica sin realizar cálculo alguno y al preguntarles sobre como obtuvo el resultado, la mayoría se limitó a contestar "que sólo mirando la gráfica", y como la gráfica estaba a escala el resultado no en todos los casos fue el correcto. Otros únicamente respondieron los extremos para $x = -1$ y $x = -2$, desconociendo como extremo el valor de la función en $x = 1$.

Otro caso importante que debe resaltarse de estos resultados, es el nulo desempeño mostrado por los alumnos en el problema tres, donde se debía construir una función por tramos que fuera derivable. Para responder esta pregunta era necesario: primero que los alumnos formaran una función continua en $x = 0$, dentro de los conocimientos necesarios para solucionar este problema se requiere la definición de función continua, límites laterales, que pudiera garantizar en $x = 0$ el mismo valor para f(x) en cada tramo. Luego que la función es continua se debía garantizar que "el pegue" sea suave, esto es, que al calcular la pendiente de la recta tangente por la izquierda en cero, sea igual a la pendiente de la recta tangente calculada por la derecha en cero. La derivada calculada en $x = 0$, para este caso, proporciona la pendiente de la recta tangente, solo era necesario hallar la derivada de cada tramo en $x = 0$ e igualarlas. Esto permite encontrar los términos *a* y *b* de la función definida por tramos.

Una de las estrategias que hubieran podido usar los alumnos es la particularización, es decir, asignarle valores *a* y *b* de manera específica siendo sistemáticos. Otra opción pudiera ser la de realizar una gráfica que les hubiera servido como una guía para orientar a una posible solución.

Entre las respuestas no se encontró ninguna solución correcta, solamente algunos intentos fallidos, que se muestran en las figuras No 1a y 1b, dadas por el mismo estudiante.

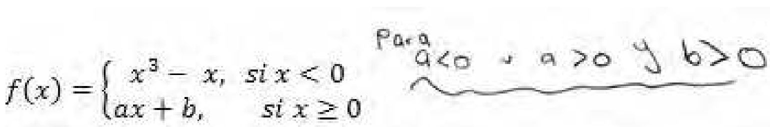



Figura 1a. Respuesta proporcionada por un alumno a la pregunta 3

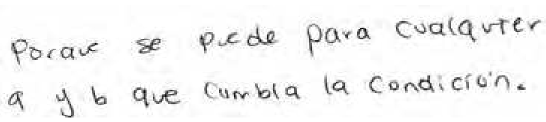



Figura 1b. Respuesta proporcionada por un alumno a la pregunta 3

Este alumno solo expresa de manera equivocada que es válido para $a < 0$ o $a > 0$ y $b > 0$ y luego hace más extenso su error "se puede para cualquier *a* y *b* que cumpla la condición".

Otra respuesta para este mismo problema se muestra en la Figura No 2. :

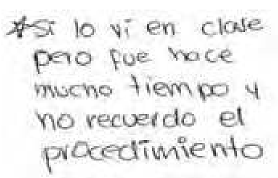



Figura 2. Respuesta proporcionada por un alumno la pregunta 3

Dentro de la resolución de problemas se reconoce como una estrategia heurística, asociar el problema con otro parecido que se haya resuelto antes, la dificultad de este estudiante es que no requiere recordar un problema, sino el procedimiento, cosa que es cognoscitivamente algo más complejo de lograr.

Otro aspecto a resaltar es que los alumnos no ven la derivada como una herramienta para solucionar los problemas planteados, como es el caso de las respuestas dadas en el problema cuatro, en el cual sólo el 7% lo responde correctamente, sin embargo en las justificaciones dadas y los procesos no utilizan la derivada. También se notó que no utilizan toda la información proporcionada en el enunciado.

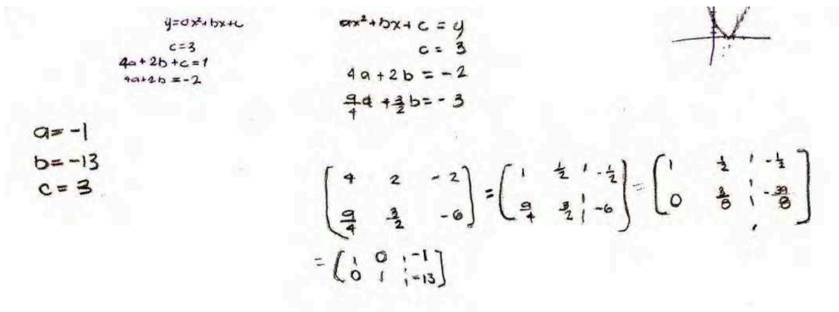



Figura 3. Respuesta incorrecta por el alumno a la pregunta 3

Este alumno como muestra la figura No 3 construye un sistema de ecuaciones lineales, con las variables a y b y lo intenta solucionar usando conocimientos de algebra lineal. También como estrategia elabora una gráfica, a pesar de ello no obtiene una respuesta correcta.

## Conclusiones

En términos generales se encontró que los alumnos:

No tienen claridad en cómo desarrollar o llevar a la práctica las definiciones y los teoremas tales como función creciente y decreciente, puntos críticos así como el criterio de la primera derivada y límites laterales, que se deben implementar para resolver apropiadamente los problemas propuestos.

Solo utilizan otras herramientas como tablas o gráficas y no ven como una herramienta importante recurrir a la derivada.

Manifiestan en algunas preguntas que ya no recuerdan cómo responder a los problemas argumentando que ya paso tiempo de haber visto el tema.

La mayoría logran entender los problemas, esto es, de acuerdo con Polya comprender un problema implica descubrir cuáles son los datos, las incógnitas, las condiciones.

No ponen en práctica ninguna de las siguientes estrategias cognitivas: particularizar, resolver un problema más simple, estudiar casos especiales, usar ensayo y error, iniciar de atrás para adelante, las cuales pudieron resultar de gran ayuda para que los alumnos lograran resolver los problemas plateados en esta investigación

A pesar que los estudiantes debían tener el dominio de algunos conocimientos tales como: extremos en un intervalo, análisis de las gráficas así como límites en el infinito; necesarios para responder los problemas que les fueron planteados, su desempeño no muestra que esos conocimientos estén siendo utilizados de manera efectiva en la resolución de problemas. Decena (2011).

## Referencias bibliográficas


Anton, H. (1991). *Cálculo y Geometría Analítica*. México: LIMUS.

Decena, V. (2011). *Algunas dificultades que presentan los estudiantes de licenciatura al resolver problemas de aplicaciones a la derivada*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila. México.

Leithold, L. (1999). *El Cálculo*. 7 edición. México: OXFORD.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to thinking mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370) New York: Macmillan.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S. y Mason, A. (1999). Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems. *Departament of Mathematics Technical Report*. Tennessee Technological University. USA.