RAZÓN, PROPORCIÓN, PROPORCIONALIDAD: CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

Gilberto Obando Zapata; Carlos Eduardo Vasco; Luis Carlos Arboleda
Universidad de Antioquia Colombia
Universidad Distrital
Universidad del Valle
gobando1715@gmail.com; carlosevasco@gmail.com; luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen. Razones, proporciones y proporcionalidad (RPP) son ejes conceptuales obligados en la educación básica en cualquier país del mundo (Mullis et al., 2008). Diversos autores han planteado que estas temáticas son presentadas en la escuela a partir de organizaciones matemáticas fuertemente aritmetizadas, con una gran estabilidad de una institución educativa a otra y de un país a otro, y con baja conexión con otras áreas del currículo que también involucran las RPP. Este artículo sintetiza una serie de principios que se pueden asumir como orientadores de unas organizaciones matemáticas integradores de lo aritmético, lo métrico y lo algebraico a lo largo del ciclo escolar, integración lograda en relación a las RPP.

Palabras clave: razón, proporción, proporcionalidad, razonamiento proporcional

Abstract. Ratios, proportions and proportionality (RPP) are conceptual axes required in basic education in any country of the world (Mullis et al., 2008). Several authors have argued that these issues are brought in school from strongly arithmetical mathematical organizations, with remarkable stability from one school to another and from one country to another and low connection to other areas of the curriculum that also involve the RPP. This article summarizes a set of principles that can be assumed as a guide to design mathematical organizations that integrate arithmetic, metric and algebraic topics around RPP throughout the school year.

Key words: ratio, proportion, proportionality, proportional reasoning

Introducción

Intentando recuperar para la escuela el conjunto de sentidos y significados que pueden tener las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad (en adelante RPP), en los últimos 40 años se han realizado múltiples trabajos que, como lo enuncia Lamon (2007), evidencian diferentes aproximaciones conceptuales, pero no aclaran suficientemente las diferencias, ni las similitudes entre ellas. Así por ejemplo, en algunos casos se presenta el concepto de razón englobando el de tasa o rata y el de proporción (Lesh, Post, & Behr, 1988), mientras que en otros, razón, tasa, rata y proporción son presentados como conceptos distintos (Vergnaud, 1988); mientras unos autores muestran razones como entidades distintas de las relaciones parte-todo y los operadores (Nesher, 1988), otros critican esta separación pues bajo ciertas condiciones una razón tiene que ser interpretada como una relación parte-todo o un operador (Lamon, 2007); hay propuestas que ponen la fuerza en una aproximación a las razones desde la perspectiva del tratamiento de las magnitudes y las cantidades llamadas intensivas y extensivas por Schwartz (1988), y hay otras que lo hacen apelando a la caracterización de diferentes formas de razonamiento (Kieren, 1988); algunos trabajos muestran que razones y proporciones tienen un vínculo estrecho con los procesos de variación –en una especie de relaciones funcionales

(Behr, Harel, & Post, 1992), mientras que otros se enfocan más en lo relativo a la solución de problemas –fundamentalmente, problemas de cuarta proporcional (Kaput & West, 1994).

En contraste con la diversidad de aproximaciones en las investigaciones en educación matemática sobre las RPP, desde el punto de vista de las matemáticas escolares, la forma cómo se organizan estos objetos de conocimiento a lo largo de los currículos de matemáticas, presentan no solo una gran estabilidad de un país a otro (Mullis et al., 2008; Ponte & Marques, 2005), sino unas formas de organización similares basadas en aproximaciones aritméticas, con poca conexión entre las diferentes temáticas en donde se estudian las RPP (Bosch, 1994; Guacaneme, 2002), y sin relación explícita con lo métrico o lo algebraico (García, 2005).

Así pues, desde marcos teóricos diferentes se han generado diversidad de sentidos sobre razones, proporciones, proporcionalidad, número racional, función lineal, que si bien no son contradictorios, si exigen esfuerzos teóricos adicionales que permitan generar marcos más apropiados para la educación matemática y para las propuestas escolares (Lamon, 2007). En lo que sigue se presentan un conjunto de ideas sobre razones, proporciones, proporcionalidad –RPP– como un intento de dar un orden a la multiplicidad de interpretaciones descritas anteriormente, derivadas de la tesis doctoral (sin publicar) del primer autor.

Nociones fundamentales sobre la razón

Sobre la noción de cantidad. Siguiendo la idea aristotélica de atributo, se puede decir que una atribución de cantidad es aquella que realizada sobre un fenómeno (objeto, evento, sucesión de eventos u objetos indexados de acuerdo a la ocurrencia de los mismos en función de condiciones espacio-temporales) permite organizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar o quitar). Si la atribución es de naturaleza continua, entonces refiere a una magnitud, la cual es susceptible de ser medida, pero si es de naturaleza discreta, refiere a una pluralidad y es susceptible de ser contada.

En toda atribución de cantidad es posible definir una relación de equivalencia (cuando dos instancias de la atribución son idénticas), una relación de orden (cuando una instancia es mayor o menor que la otra) y una operación aditiva (que permite agregar o juntar dos instancias de la atribución de cantidad para producir una tercera). La relación de equivalencia permite definir clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia se puede definir como una *cantidad* en la atribución dada (por ejemplo, cuando la atribución de cantidad refiere a una *longitud*, las clases de equivalencia formadas se pueden llamar *cantidades de longitud*). Así entonces, el conjunto de cantidades con la relación de equivalencia y la operación aditiva forman un *semigrupo aditivo conmutativo* y se tiene entonces lo que Stein (1990) ha denominado un *sistema de cantidades*.

La noción de *sistema de cantidades* permite tratar en una misma categoría sistemas que por su función deben ser reconocidos como formas de cantidad (por ejemplo, el valor de intercambio de bienes y servicios, y entre ellos, El dinero) pero que desde el punto de vista matemático o físico no se consideran magnitudes. Igualmente facilita hablar de razones sin tener que entrar a distinguir si la razón se define entre números, magnitudes (intensivas o extensivas, escalares o vectoriales, matemáticas o sociales) o incluso sin la necesidad del recurso al número.

Sobre la noción de razón. La condición necesaria y suficiente para que dadas dos *cantidades* de un *sistema de cantidades*, sobre ellas se pueda establecer una razón, es que cumplan con la propiedad arquimediana: dadas dos *cantidades* x, $y \in A$, con A un *sistema de cantidades*, entonces entre ellas se puede establecer una razón si existen números naturales m, n tales que $n{\cdot}x > y \wedge m \cdot y > x$ (en el contexto griego no necesariamente implicaban número naturales, sino magnitudes equimúltiplos). La idea general detrás de esta formulación es que sobre dos cantidades x e y, entre ellas se puede definir una razón si dichas cantidades son finitas. Dada la simetría de la propiedad arquimediana con respecto a las cantidades x e y, entonces sobre ellas siempre será posible definir dos razones: dados dos *sistemas de cantidad* A_1 y A_2 (no necesariamente distintos) y dos *cantidades* $x \in A_1$, $y \in A_2$, entre dichas cantidades se pueden definir dos razones, a saber, "la razón de x a y", y la "la razón de y a x" (en la notación clásica $x : y$ o $y : x$). Ser consciente de la existencia de este par de razones entre cantidades y de la distinción entre ellas es importante no solo porque la una es la recíproca de la otra, sino también porque en términos de las relaciones que cuantifican, una de ellas se puede usar como base para determinar unívocamente la otra: "si la razón de x a y es α" entonces "la razón de y a x es α^{-1}" (tal como se concebía en la aritmética griega).

Sobre la proporción. Siguiendo la noción clásica, se entiende la proporción como la equivalencia entre dos razones, es decir, la proporción se comprende como una forma proposicional binaria o diádica que permite poner en relación dos razones, o como un predicado cuaternario o tetrádico entre cuatro cantidades: si las *cantidades* x, y, x', y' son tales que $x = \delta \cdot x'$ implica $y = \delta \cdot y'$ (igual medida relativa de x a x' que y a y'), entonces $x : y :: x' : y'$. Esto implica que las nociones de medida relativa y equimultiplicidad son fundamentales en el proceso de comprensión tanto de la razón como de la proporción, y ambas permiten *objetivar* la razón a través de la clase de equivalencia de todas las parejas de cantidades que están en la misma razón (equivalencia significa designar la misma propiedad característica de las cantidades comparadas, y en particular, igual medida relativa).

Funciones de la razón sobre las cantidades

En su forma más general, una razón entre dos *cantidades* es una nueva cantidad que surge de la comparación por cociente entre ellas, y por lo tanto expresa la medida relativa de una de ellas tomando la otra como unidad. Esto permite diferenciar la relación entre las cantidades de la razón como cuantificación objetivada de dicha relación. Por ejemplo, entre dos *cantidades x* e *y* en donde *x es el doble de y*, 2 objetiva la razón entre dichas cantidades, y la expresión "*es el doble de*" la relación entre ellas.

La razón como relator/correlator: De acuerdo con la distinción anterior, la razón ya objetivada puede cumplir una función de cuantificar la relación por cociente en dos situaciones distintas, bien entre *dos cantidades específicas* (fijas), bien entre *dos familias de cantidades*. En el primer caso, la razón es un *relator* (Vasco, 1994), mientras que en el segundo, la razón es un *correlator* (Vasco. 1994). Si las cantidades fijas son homogéneas, la razón $x:y$ es cantidad intensiva adimensional que se objetiva como un número real y expresa cuántas veces está contenida la *cantidad x* en la *cantidad y*, o simplemente, la medida de la *cantidad x* cuando se considera la *cantidad y* como unidad de medida. Si las cantidades fijas son heterogéneas, la razón $x:y$ es una cantidad intensiva con dimensiones y expresa la relativización de la cantidad *x* por cada unidad de la cantidad *y* (normalización de *x* sobre *y*). Si la razón objetiva la relación entre dos familias de cantidades, es una *cantidad intensiva* (correlator intensivo) que permite establecer una correspondencia uno a uno entre elementos de ambas familias, y define una proporcionalidad directa entre ellas. La razón se objetiva entonces en la constante de proporcionalidad la cual será adimensional si el *correlator intensivo* se define entre familias de cantidades de la misma naturaleza o tendrá dimensiones en caso que las familias sean de diferente naturaleza.

La razón como operador/transformador. Además de la función de la razón en la doble situación relacional anterior, distinguimos otro tipo de función que se presenta cuando dadas una cantidad y la razón de esta cantidad con otra cantidad desconocida, entonces la razón se aplica como operador sobre la cantidad conocida para calcular la cantidad desconocida. Si la cantidad inicial y final son homogéneas, la razón α expresa un *operador escalar* (factor de ampliación-reducción) que, aplicado sobre una de las dos cantidades, produce la otra cantidad. Si cantidad inicial y final son heterogéneas, entonces la razón es un *transformador* que aplicado sobre una de las cantidades, la transforma en la otra con la que se correlaciona. La razón como transformador es de especial interés en el caso de la comparación entre familias de cantidades que se correlacionan linealmente, en donde la razón es un transformador lineal que aplicado sobre cualquier *cantidad* de una de las familias produce la *cantidad* correspondiente en la otra familia.

Géneros de situación

La tipología que se presenta a continuación toma como base tanto la naturaleza de las cantidades involucradas en la situación, como la naturaleza de las relaciones que se pueden establecer entre dichas cantidades y las acciones que se despliegan sobre ellas. De esta forma se fija la atención en los aspectos estructurales de las situaciones, y no en las acciones que se pueden realizar sobre las cantidades, las cuales quedan descritas por las funciones de la razón como relator, operador, correlator o transformador.

Situaciones de relación parte-todo. Son aquellas en las que dos *cantidades* de un mismo *sistema de cantidades* se comparan entre sí a través de su cociente para determinar la medida relativa de una con respecto a la otra (*la razón como relator*). La razón es entonces una *cantidad numérica* que expresa o bien la relación de multiplicidad de la mayor con respecto a la menor, o bien la relación de qué parte es la menor de la mayor. En general esta cantidad numérica se expresa a través de un número real. Si las cantidades son conmensurables, la razón es un número racional, y se puede encontrar a partir de uno de los dos procedimientos siguientes:

Caso 1: Si *y* mide a *x*, entonces existe n ∈ ℕ tal que $x = n \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{1}{n} \cdot x$

Caso 2: Si *y* no mide a *x*, entonces existe otra cantidad *c*, tal que: $x = n \cdot c \wedge y = m \cdot c$, de donde se deduce que $y = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot x + \frac{1}{n} \cdot x + \cdots + \frac{1}{n} \cdot x}_{m-veces} = \frac{m}{n} \cdot x$

Estos dos casos tienen un valor pedagógico especial pues cuando la razón es expresada a través de la notación fraccionaria, el primero define la fracción unitaria a partir de la relación *ser múltiplo de…*, mientras que el segundo permite ver la fracción no unitaria como una repetición de fracciones unitarias. De esta manera la fracción emerge de la acción de medir, y de la razón que expresa esta medición.

Situaciones de concentración. Se trata de situaciones en las que un cierto fenómeno es analizado de tal forma que con respecto a una determinada atribución de cantidad se comparan las cantidades que representan el todo y las partes, o las partes entre sí. Es decir, dado un fenómeno y un *sistema de cantidades A* que cuantifica un cierto atributo de este fenómeno, entonces existe una cierta *cantidad w* ∈ *A* que cuantifica el fenómeno como un todo, y otras *cantidades* $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ (todas ellas en el sistema *A*) las cuales cuantifican el mismo atributo en las partes que componen el todo, y estas cantidades son tales que

$w = w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup \ldots \cup w_n$, y por lo tanto, para cualquier cantidad w_i (con i = 1, 2, 3,…,n), $\frac{w_i}{w} = \alpha_i$ expresa la normalización de la cantidad de la parte con respecto al todo (de manera similar si lo que se comparan son dos partes entre sí). La comparación entre parejas de estas cantidades son también relaciones parte-todo (o en su defecto, relaciones parte-parte) y la razón α cumple una función como relator. Pero cuando se da la razón α y bien la cantidad w o la cantidad w_i para hallar la otra, la razón cumple su función como operador.

Si en una concentración determinada, el todo cambia, entonces las partes que lo componen cambian proporcionalmente al cambio en el todo de tal forma que la razón α entre cantidades w y w_i permanece constante. La conservación proporcional de la relación entre las partes y el todo permite definir una proporcionalidad directa entre la serie de cantidades que puede tomar el todo en su variación, y la serie de variaciones que puede tomar cualquiera de las partes a medida que el todo va tomando sus valores respectivos. Dicho de otra forma, si α es la concentración de una *cantidad* w_i sobre otra cantidad *w*, y si *X* (conjunto de valores del todo en el proceso de variación) e *Y* (conjunto de valores de la parte en el proceso de variación) son dos *familias de cantidades* entonces existe una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x) = y = \alpha \cdot x$. La razón α es entonces un correlator intensivo adimensional en relación al proceso de variación descrito por la función *f*.

Situaciones de densidad de distribución. Para un fenómeno dado, se tienen dos sistemas de cantidades distintos (describiendo cada uno una atribución de cantidad sobre el fenómeno), para los cuales, las cantidades de uno de los sistemas se distribuyen uniformemente sobre cantidades del otro sistema. Esto es, dadas dos cantidades cualesquiera $x \in A$, $y \in B$ (con *A* y *B* dos sistemas de cantidades heterogéneos), una de las cuales se supone con una distribución homogénea sobre la otra, entonces existe un número $\alpha \in Q$ que es la razón de *x* a *y* que cuantifica la forma de tal distribución, es decir, normaliza la cantidad *x* por cada unidad de la cantidad *y*. Así, en primera instancia se tiene que la razón cumple una función como relator: dada la pareja (*x*, *y*) la razón $\frac{x}{y} = \alpha$ expresa la ley de distribución uniforme de la cantidad *x* sobre la cantidad *y*, y por lo tanto α expresa, cuántas unidades de *x* hay por cada unidad de *y*. La razón α relator intensivo dimensional. Por supuesto, cuando la situación indaga por una de las cantidades, conocidas la razón de distribución α y la otra cantidad, entonces la razón cumple una función como operador.

La razón puede también cumplir una función de correlator, pues bajo el supuesto de que la densidad de distribución α de cantidades *x* sobre las cantidades *y B* es uniforme, entonces la razón α permite definir dos subconjuntos *A'* y *B'* en *A* y *B* respectivamente, tales que para cada valor $x_i \in A'$ existe un valor $y_i \in B'$ con $\frac{x_i}{y_i} = \alpha$, esto es, existe una función $f : B' \to A'$ tal que para cada $y_i \in B'$ $\exists$ $x_i \in A'$ y $f(y_i) = x_i = \alpha \times y_i$. Bajo dicha función de distribución, se puede definir una proporcionalidad directa entre *A* y *B*, en donde la razón α es la constante de proporcionalidad. Dado el carácter ideal de la homogeneidad de la distribución que supone dicha constancia de la razón, ésta debe ser considerada como una cantidad intensiva sobre los sistemas *A* y *B*. La razón α es un transformador lineal.

Situaciones de tasa o rata. En este caso, las situaciones comparan dos cantidades $a \in A$ y $b \in B$ (por lo general dos sistemas de cantidades heterogéneos), en los cuales la razón $\alpha = \frac{a}{b}$ expresa una condición de eficiencia de un determinado proceso o fenómeno (por ejemplo, el rendimiento de un deportista, la eficacia de un trabajo, las indicadores estadísticos del comportamiento de un determinado fenómeno como la mortalidad infantil, etc.). Por tratarse de la determinación de la eficiencia de algo o alguien, implica que, sobre ese fenómeno estudiado, se establecen una serie de mediciones de estados posibles del evento, en circunstancias espacio-temporales específicas, y la razón establece una especie de comportamiento ideal que homogeniza el fenómeno como si se diera siempre de manera idéntica a través del tiempo y del espacio. Como en el caso anterior, la razón puede cumplir con las funciones ya descritas; como relator/operador, o correlator/transformador.

Situaciones de medida. Es el caso en el que dado un *sistema de cantidades M*, en el cual se elige una cantidad *u* como unidad de medida (todas las demás cantidades en *M* se comparan con respecto a la cantidad *u*), y un *sistema de cantidades Q* (por lo general los números reales), entonces se puede definir una función $\delta_u : u \times M \to Q$ con $\delta_u(u) = k \in Q$ y si $\forall$ *m* $\in$ *M*, $\exists$ $\rho \in$ *Q*, $\rho = \frac{m}{u}$, entonces $\delta_u(m) = \delta_u(\rho \cdot u) = \rho \cdot \delta_u(u) = \rho \cdot k = \alpha$. Esta función es llamada la función medida de *M* sobre *Q*, y $\alpha = \rho \cdot k$ es definida como la medida de la *cantidad m*.

La función medida define un isomorfismo entre los *sistema de cantidades M* y *Q*, o al menos sobre subconjuntos de éstos, lo cual permite una extensión de las propiedades de la aritmética al tratamiento de las *cantidades* no numéricas. En particular cuando el sistema *M* es una magnitud, este isomorfismo permite que en vez de comparar las cantidades de magnitud entre sí (como se hacía en la antigüedad griega), se comparan sus medidas, y cualquier relación entre las medidas, sea afirmada sobre las *cantidades de magnitud*.

Para terminar, si k = 1, entonces la función δ_u es la medida usual, o medida real. Si k = 100, la función δ_u define entonces lo que usualmente llamamos porcentajes.

Conclusiones

Tres principios están entonces en la base de lo descrito. El primer principio implica una mirada a la razón como una forma de cuantificación de la relación por cociente entre dos cantidades, y no como un cociente entre dos números, y a la proporcionalidad como una forma de poner en correspondencia biunívoca dos familias de cantidades a partir de identificar una propiedad invariante a todas la parejas de cantidades correspondientes: conservar la misma relación por cociente. La proporción se comprende entonces como una forma proposicional binaria o diádica que permite poner en relación dos razones. El segundo tiene que ver con el análisis de la función que cumple la razón en relación a las cantidades involucradas en la situación. Se identificaron cuatro funciones básicas: la razón como relator, como operador, como correlator, o como transformador, según si la situación compara dos cantidades o dos familias de cantidades. Estas funciones no son estáticas, sino que, en una situación dada, la función de la razón cambia continuamente de una función a otra según el tipo de problemas que se vayan presentando en la situación. El tercero, es la tipología de las situaciones RPP, separando los aspectos matemáticos relativos a tales objetos de conocimiento de los relativos a la estructura de la situación: tipos de cantidades y formas de relación entre tales cantidades. A estos tipos de situaciones RPP se le asocian las familias de actividad que caracterizan los procedimientos típicos a partir de los cuales los individuos enfrentan y solucionan los problemas relativos a las situaciones RPP.

Referencias bibliográficas

Behr, M., Harel, G., & Post, T. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing Company.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* (Tesis Doctoral), Univesitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis Doctoral), Universidad de Jaén, Jaén, España.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA,* 7(1), 3-42.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value poportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-290). Albany, NY: State University of New York Press.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. B. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). New York: Information Age Publishing.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-117). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Mullis, I., Martin, M., Olson, J., Berger, D., Milne, D., & Stanco, G. (Eds.). (2008). *TIMSS 2007 encyclopedia: A guide to mathematics and science education around the world.* (Vols. 1 - 2). Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-40). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Ponte, J. P., & Marques, S. (2005). *Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study.* Paper presented at the Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-53). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese, 84*(2), 163-211. doi: 10.1007/BF00485377

Vasco, C. E. (1994). Relatores y Operadores. In A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didactica de las matematicas. Volumen 2* (pp. 63-86). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.