INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS EN CARRERAS DE GRADO DE INGENIERÍA

Ana María Craveri, María del Carmen Spengler
Universidad Tecnológica Nacional Argentina
craveri@arnet.com.a , mariaspengler@gmail.com

Resumen. El trabajo que se presenta se refiere a la problemática de construir el concepto de 'procesos estocásticos' a partir de conocimientos básicos de probabilidad en el contexto de una clase dirigida a estudiantes universitarios de segundo año de distintas carreras de grado de ingeniería que cursan la materia Probabilidad y Estadística. Se intenta dar una respuesta al problema planteado desde la perspectiva de la Educación Matemática como Ciencia de Diseño poniendo en juego las fases de la Ingeniería Didáctica. Se propone la idea de generar la distribución de Poisson no simplemente como una aproximación a la distribución Binomial, sino directamente a partir de un modelo simple de comportamiento estocástico que se refiere a sucesos distribuidos al azar en el tiempo (o en el espacio). Queda abierta en prospectiva la ampliación de este material didáctico y su evaluación en el marco del Proyecto de Investigación sobre diseño, elaboración y evaluación de materiales didácticos para la Matemática Básica Universitaria que genera este reporte.

Palabras clave: ingeniería didáctica, diseño, procesos estocásticos

Abstract The work presented refers to the problem of constructing the concept of 'stochastic processes' from basic knowledge of probability in the context of a class addressed to second-year university students from different Engineering degrees who attend the Probability and Statistics subject. We try to give an answer to the problem from the perspective of Mathematics Education as a Design Science putting at stake the phases of Didactic Engineering. The idea of creating the Poisson distribution is put forward not simply as an approximation to the Binomial distribution, but directly from a simple model of stochastic behavior which refers to events distributed randomly over time (or space). The extension of this teaching material and its evaluation in the framework of the research project on design, development and evaluation of teaching materials for the Basic University Mathematics that launches this report will be dealt with in the future.

Key words: didactic engineering, design, stochastic processes

Introducción

El estudio de los Procesos Estocásticos está ubicado tradicionalmente entre los últimos capítulos a desarrollar en un curso de Estadística Básica. Requiere que el alumno domine los conceptos de: probabilidad, variables aleatorias y modelos probabilísticos, entre otros, así como también las herramientas de análisis matemático multivariado.

El planteo que nos hacemos, a modo de problema, es: ¿cómo introducir un tema complejo de Estadística Matemática en un curso de Estadística Aplicada para estudiantes de segundo año de Ingeniería de distintas especialidades? ¿Cómo impacta esta forma de abordaje del tema como elemento motivador para la prosecución del estudio de procesos estocásticos complejos?

Al respecto, en las diferentes carreras de Ingeniería, como en una multitud de otros campos disciplinarios, tiene interés el estudio de fenómenos en los que una o más características aleatorias fluctúan a lo largo del tiempo.

El análisis de este tipo de fenómenos aleatorios requiere de modelos estocásticos específicos debido a la existencia de relaciones temporales que ligan los valores de una variable en el instante t con sus valores pasados, así como, en su caso, con los valores pasados o actuales de otras variables.

Nuestra propuesta de abordaje del tema intenta dar una respuesta al problema planteado desde la perspectiva de la Educación Matemática como Ciencia de Diseño. (Wittman, 1995), con la concepción metodológica de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995).

Marco teórico

La educación matemática como ciencia de diseño

Con relación a los materiales didácticos, Wittman propone que los materiales desarrollados por educadores matemáticos deben ser construidos tanto como el conocimiento y facilitar una aproximación interactiva al mismo. En particular los materiales desarrollados deben proveer a docentes y estudiantes, libertad para hacer elecciones por sí mismos. En la realidad, la calidad de esas construcciones depende de la fantasía constructiva de base, del ingenio de los diseñadores y de la evaluación sistemática, tópicos de la ciencia de diseño. (Wittman, 1995)

Este autor propone "experimentos clínicos de enseñanza" en los que los materiales didácticos no sólo son instrumentos, sino objetivo de estudio. Esto ha llevado a una indagación sobre las formas de elección y/o desarrollo, que los constituya en herramientas cognitivas, sobre todo en los cursos masivos donde tiene lugar la enseñanza básica y donde la formación en un aprendizaje autónomo es indispensable.

La necesidad de modelos de análisis del material curricular, que oriente la investigación, hay que entenderla en la triple dimensión de, elaboración, selección y uso de materiales curriculares (Wittman, 1995)

Objetivos

- Aportar una forma de ingresar al estudio de los Procesos Estocásticos aplicando los pasos de la Ingeniería Didáctica
- Diseñar un material curricular adecuado

Metodología

La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación

> La noción de Ingeniería Didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo" (Artigue, 1995, p.33).

En la concepción de la Ingeniería Didáctica, la Didáctica de la Matemática amplía su problemática incluyendo "el conocimiento matemático" entre sus objetivos de estudio y "el proceso de adquisición" de ese conocimiento, como objeto primario de la investigación.

Una característica importante es su consideración de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje bajo el enfoque sistémico. Chevallard (1998) describe el "sistema didáctico" en sentido estricto, formado esencialmente por tres subsistemas: "profesor", "alumno" y "saber a enseñar". Artigue describe, esquemáticamente, tres aproximaciones principales a estos objetos de estudio, complementarias entre sí y parcialmente articuladas:

- Una aproximación "cognitiva" que se ha desarrollado alrededor de los trabajos de Vergnaud en el área de la teoría de los campos conceptuales.
- Una aproximación a través de los "saberes" que se han desarrollado alrededor de los trabajos de Chevallard (1998) en el área de la teoría de la transposición didáctica, en un principio, antes de extenderse a una aproximación antropológica más global del campo didáctico.
- Una aproximación a través de las "situaciones" que es finalmente la que ha tenido, sin duda, la influencia más determinante y cuyo padre fundador es G. Brousseau. (Artigue, 1995)

Artigue realiza la descripción de la metodología de la Ingeniería Didáctica por medio de una distinción temporal de su proceso experimental. Delimita este proceso en cuatro fases:

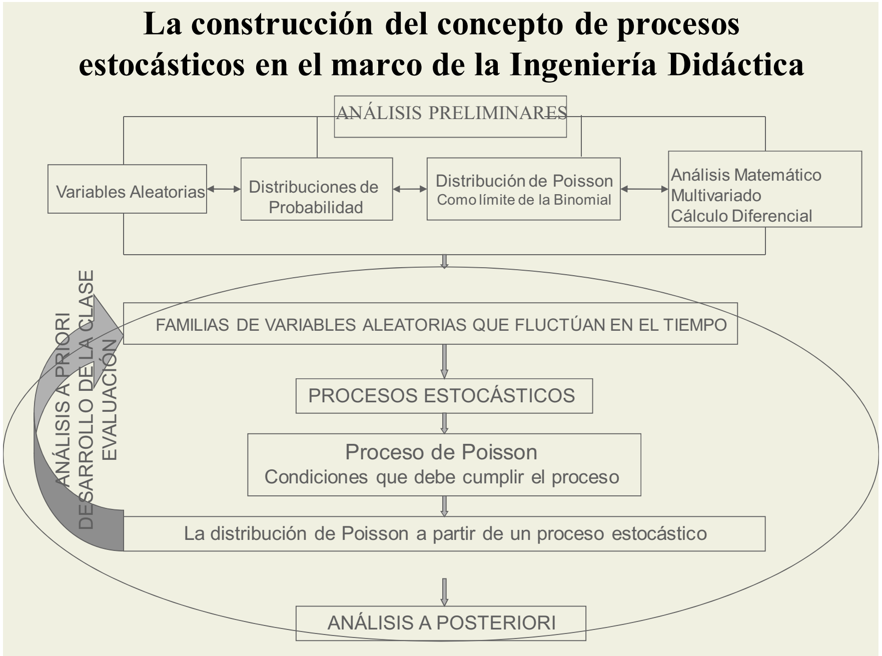
- La fase 1, referida a los análisis preliminares, está basada no sólo en un "cuadro teórico didáctico general" y en los "conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio" sino también en ciertos análisis que hacen al contexto y refieren a los objetivos específicos de la investigación. Entre los más frecuentes figuran: análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones, dificultades y obstáculos de los estudiantes en su evolución, el campo de restricciones donde se va a situar la "realización didáctica" efectiva.

- La fase 2 de "concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería" se trata de las decisiones del investigador de actuar sobre un cierto número de "variables de comando" que considera pertinentes con relación al problema en estudio. Refiere a las "selecciones principales" ligadas en su mayoría con el contenido, las "selecciones locales" ligadas a la descripción del proceso de enseñanza presentadas conforme a la teoría de las "situaciones didácticas" (Brousseau, 1981). El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado.
- La fase 3 de "experimentación", refiere a la puesta en juego de la concepción y análisis a priori y a la obtención de datos provenientes de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Frecuentemente estos datos se completan con "metodologías externas" como por ejemplo cuestionarios, entrevistas.
- La fase 4 de "análisis a posteriori y evaluación" se refiere a la validación de las hipótesis de investigación formuladas a través de la confrontación que se lleva a cabo entre el "análisis a priori" y el "análisis a posteriori" de los datos recabados en la fase de experimentación (Artigue, 1995).

Los análisis preliminares. La concepción y los análisis previos

Los objetivos de esta presentación hacen a la enseñanza de un contenido específico en un contexto determinado, sin perder de vista que si bien se ha restringido a un tema de Estadística Básica, subyace en ella la característica de la Matemática, como ciencia, de proporcionar formas de pensamiento que permiten extenderse y abordar otros temas. El éxito en la comprensión de un tema es el primer paso para la aprensión de otros conceptos. Es por esto que intentar aproximar respuestas a los interrogantes planteados al inicio de este trabajo, no es un mero problema de organizar contenidos con algún criterio, sino que se trata de "alcanzar una visión estructural del aprendizaje y analizar la significatividad del mismo desde una posición crítico-transformadora" (Sanjurjo, Aebli, Colussi, 1995). El análisis del desarrollo del trabajo áulico tiene su fundamento en el aporte de las llamadas "nuevas teorías" sobre la construcción del conocimiento en el marco de una Didáctica Operativa (Sanjurjo, Aebli, Colussi, 1995).

Si bien en este momento nos focalizamos en las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica la visualización completa de la metodología se sintetiza en el siguiente diagrama



La decisión es plantear el tema a partir del desarrollo del Proceso de Poisson vinculado al concepto de Proceso Estocástico a partir de problemas disparadores, por ejemplo:

> *Se está estudiando un muelle de carga y descarga de camiones (sistema) para determinar la dimensión óptima de una brigada. El muelle tiene espacio sólo para un camión. La llegada de los camiones es aleatoria y las salidas también. El tiempo de servicio es una variable aleatoria que corresponde al tiempo entre dos salidas sucesivas. En este caso el estado del sistema es 'ocupado' o 'no ocupado'*

La resolución de este problema comprende dos etapas distintas:

1) La búsqueda de una ley de probabilidad del sistema

2) La búsqueda o investigación del óptimo económico

Como vemos estos sistema pueden tomar varios 'estados' y las duraciones de estos estados es aleatoria. Para describir matemáticamente el sistema hay que determinar estas leyes de probabilidad.

El tema de la búsqueda del óptimo económico no nos ocupará en este momento.

Se hace necesario introducir la noción de "Proceso estocástico".

Proceso Estocástico

Hemos estudiado funciones de probabilidad de una variable aleatoria, funciones de probabilidad de dos variables aleatorias (Regresión y Correlación), generalizando podemos pensar en funciones de probabilidad de n variables aleatorias.

Pensemos ahora que una secuencia: X_1, X_2------- de variables aleatorias puede también ser tratada como una 'familia de variables aleatorias' X y sus realizaciones son las secuencias (x_1,x_2…). Cuando esta familia de variables aleatorias fluctúa en el tiempo (sus realizaciones son funciones de una variable real t) constituyen los llamados procesos estocásticos. Así por ejemplo:

- El número de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador durante el intervalo de tiempo (0,t), para un t fijado es una variable aleatoria, pero el número de llamadas considerado como una función de t, esto es como una función de la variable t donde t toma valores en un intervalo, es una función aleatoria.

En general simbolizamos un proceso estocástico con: $\{X_t , t \varepsilon I\}$; $I \subset R$

Observación: Habitualmente el parámetro t es interpretado cono tiempo, pero puede ser también longitud, superficie, etc.

En este momento nos limitaremos al proceso de Poisson.

Proceso de Poisson.

Condiciones que debe cumplir el proceso.

Primera condición: debe ser un proceso estocástico a *incrementos independientes*, es decir que los sucesos están distribuidos individualmente al azar sobre el intervalo t. En el proceso poissoniano cada aparición es una señal o punto (proceso a señales) cada vez que aparece un valor de X_t es una señal o punto del eje t. Quiere decir que el número de señales en intervalos de tiempo disjuntos deben ser variables aleatorias independientes.

Segunda condición: que el proceso estocástico sea a *incrementos homogéneos* es decir que las señales o puntos están distribuidos *colectivamente* al azar. Con ello queremos expresar, que la probabilidad de que se presente un número determinado de señales va a ser la misma, para intervalos de tiempo de igual longitud.

Tercera condición: debe asegurarse que los suceso (señales) se presenten en forma repentina ó instantánea en intervalos cortos de tiempo pero siempre en forma individual o sea no formando pares o grupos. Esto lo expresamos con dos subcondiciones:

a) Vamos a exigir que la probabilidad de tener una señal en el intervalo pequeño de tiempo de longitud t sea directamente proporcional a la longitud del intervalo.

b) La probabilidad de tener más de una señal durante el intervalo de tiempo t es ε(t) (es decir tiende a cero cuando $t \to 0$)

Sea un proceso estocástico definido por $\{X_t; 0 \le t \le \infty\}$. Si este proceso verifica las condiciones: primera, segunda y tercera (a y b) y además se cumple que $P(X_0 = 0) = 1$ (es decir la probabilidad de tener 0 punto en el intervalo 0 es 1) este proceso es un proceso homogéneo discreto de Poisson y responde a la siguiente función de probabilidad:

$$P(X_t = i) = P_i(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} \qquad \begin{matrix} (i = 0,1,2...) \\ (\lambda > 0) \end{matrix}$$

Demostración: La probabilidad de tener i puntos en el intervalo de tiempo ampliado (t+Δt), se puede pensar, por ser un proceso a incrementos homogéneos e independientes (es decir cumpliéndose las condiciones primera y segunda) de la siguiente forma:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t).P_0(\Delta t)$$
$$P_i(t+\Delta t) = P_i(t).P_0(\Delta t) + P_{i-1}(t).P_1(\Delta t) + P_{i-2}(t).P_2(\Delta t) + ... + P_0(t).P_i(\Delta t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{i} P_{i-k}(t) P_k(\Delta t)$$

Escribiremos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$ en otra forma $P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + \varepsilon(\Delta t)$

$\Pr$ (tener más de una señal en Δt)$=1 - P_0(\Delta t) - P_1(\Delta t) \; = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)$

Donde $\varepsilon(\Delta t)$ es un infinitésimo de orden superior a Δt

De donde: $P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) - \varepsilon(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - \underbrace{[\varepsilon(\Delta t) + \varepsilon(\Delta t)]}_{\varepsilon\Delta t}$

Luego $P_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - \varepsilon(\Delta t)$

La demostración la haremos primero para $i = 0$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda\Delta t - \varepsilon(\Delta t)]$$

$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-\lambda P_0(t)\Delta t-P_0(t)\varepsilon(\Delta t)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)-P_0(t).\frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}$$

Aplicando límite para $\Delta t\to 0$, tendremos: $P_0^{'}(t)=-\lambda P_0(t)$

Una ecuación diferencial lineal de primer orden, a partir de la cual, resolviéndola obtendremos nuestra incógnita $P_0(t)$:

$$\frac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)}=-\lambda \Rightarrow \int \frac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)}dt=-\lambda\int dt \Rightarrow \ln P_0(t)=-\lambda t+C$$

Luego: $P_0(0)=e^{-\lambda_0+C}=1$ luego C=0 $\Rightarrow$ $P_0(t)=e^{-\lambda t}$ Veremos qué pasa para i = 1, 2 …

Volviendo a la primera identidad

$$P_i(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{i}P_{i-k}(t)P_k(\Delta t)=P_i(t)\left[1-\lambda\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\right]+P_{i-1}(t)\left[\lambda\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\right]+\varepsilon^{'}(\Delta t)$$

En donde $\varepsilon^{'}(\Delta t)$ Es un infinitésimo de orden superior a los infinitésimos de los términos anteriores:

$$P_i(t+\Delta t)-P_i(t)=-\lambda P_i(t)+P_{i-1}(t)\lambda+\frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}\sum_{k=0}^{i}P_k(t)$$

$$P_i^{'}(t)=-\lambda P_i(t)+\lambda P_{i-1}(t) \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

Resulta así un sistema recurrente de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden a coeficientes constantes.

$$P_i^{'}(t)+\lambda P_i(t)-\lambda P_{i-1}(t)=0$$

Para resolver esta ecuación diferencial hagamos: $P_i(t)=u(t).v(t)$ (1)

Donde $u(t)$ y $v(t)$ son dos funciones de t desconocidas, donde una de ellas se elegirá en alguna forma que cumpla una restricción:

$$u^{'}(t).v(t)+v^{'}(t).u(t)-\lambda u(t).v(t)-\lambda P_{i-1}(t)=0$$

$$v\left[u^{'}+\lambda u\right]+v^{'}u-\lambda P_{i-1}(t)=0 \qquad (2)$$

Elegiremos a u de tal forma que $u^{'}+\lambda u=0$

$$u' = -\lambda u \qquad\qquad \Rightarrow \qquad \int_0^t \frac{u'}{u}dt = -\lambda \int_0^t dt \qquad \Rightarrow \qquad u = e^{-\lambda t}$$
$$\frac{u'}{u}dt = -\lambda dt$$

Reemplazando en (2)

$$v' e^{-\lambda t} - \lambda P_{i-1}(t) = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \qquad \int_0^t v' dt = \lambda \int_0^t P_{i-1}(t).e^{\lambda t} dt$$
$$v' = \lambda P_{i-1}(t).e^{\lambda t}$$

Volviendo a (1)

$$P_i(t) = e^{-\lambda t}.\lambda \int_0^t P_{i-1}(t).e^{\lambda t} dt \qquad i = 1, 2, \ldots$$

La solución es de recurrencia, luego trabajándola, tendremos:

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}\lambda \int_0^t P_0(t).e^{\lambda t} dt = e^{-\lambda t}\lambda \int_0^t e^{-\lambda t}.e^{\lambda t} dt = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1!}$$

Generalizando, llegamos a que: $P_i(t) = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}$ $\quad i = 0,1,2....$ Siendo λ el número medio de señales o puntos en el intervalo unidad, que podemos definir también como *intensidad del proceso.*

Conclusiones

Entendemos que a través de esta presentación se responde al primero de los interrogantes planteados, en lo que hace a la introducción en forma sencilla y asequible al alumno de un tema que, en general, en la bibliografía específica requiere de un mayor dominio de la Teoría de las Probabilidades.

Se impone la necesidad de ampliar el material didáctico sobre los Procesos Estocásticos e instrumentar la evaluación, tanto de los materiales didácticos como de los aprendizajes, con vista a mejorar la construcción de este concepto, actividades que están contempladas en los objetivos del Proyecto de Investigación del que somos parte todos los autores de esta presentación.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59), Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3) 37-127.

Chevallard, Y. (1998) *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.

Sanjurjo, L; Aebli, H. y Colussi, G (1995). *Fundamentos psicológicos de una didáctica operativa*. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Wittman, E. (1995). Mathematics Education as a Design Science. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1) 355-374.