UTILIZAÇÃO DE FERRAMENTAS DE DESENHO GEOMÉTRICO PARA O ENSINO DE CÔNICAS

Juracélio Ferreira Lopes
Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG/Campus Ouro Preto Brasil
juracelio@yahoo.com.br.

Resumo. Nesta oficina apresenta-se um método para construção do esboço das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) partindo-se da definição geométrica destas curvas. Neste método de construção serão utilizadas réguas especiais baseadas no método de Kepler também conhecido como método do fio esticado. Com esta construção por meio deste método torna-se possível visualizar e explorar diversas propriedades destas curvas facilitando a compreensão das definições e demonstrações que aparecem no tratamento algébrico.

Palavras chave: cônicas, geometria analítica, visualização

Abstract. This workshop presents a method for constructing the sketch of conics (ellipse, parabola and hyperbola) starting from the geometric definition of these curves. In this method of construction are used rules based on the Kepler's method also known as stretched wire method. This construction using this method becomes possible to visualize and explore several properties of these curves facilitating the understanding of the definitions and demonstration that appear in the algebraic treatment.

Key words: conics, analytic geometry, visualization

Introdução

O estudo das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) abordado na disciplina de Geometria Analítica a nível universitário possui aplicações tecnológicas em diferentes áreas do conhecimento. No entanto, esta disciplina geralmente é oferecida no primeiro ano de graduação quando boa parte dos alunos ainda não está acostumada com o formalismo das demonstrações. Além disto, após análise de livros de Geometria Analítica a nível universitário de diversos autores, tais como Boulos (2007), Lima (2006), Iezzi (1993) Murdoch (1969), constatou-se que o conteúdo sobre as cônicas é, na sua maioria, apresentado apenas sob o ponto de vista de equações algébricas. Segundo Durval (2003) o fato do aluno reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações é fundamental para que ele possa transferir ou modificar formulações ou representações na resolução de um problema. Desta forma, este trabalho propõe o estudo das cônicas a partir de construções geométricas por meio da utilização de ferramentas didáticas. Com esta abordagem o aluno terá suporte para o estudo algébrico destas curvas, pois segundo Chalouh; Herscovics (1994) a utilização de conceitos geométricos auxilia a construção de significado para as expressões algébricas, servindo de sustentação para a construção de uma base cognitiva.

Metodologia

Nesta oficina utilizamos três tipos de ferramentas sendo que cada uma delas permite desenhar um tipo específico de cônica partindo sempre da definição geométrica da curva. A figura1 mostra as ferramentas elipsógrafo, hiperbológrafo e parabológrafo que foram utilizadas, respectivamente, para desenhar as curvas elipse, hipérbole e parábola.

No estudo de cada uma das cônicas foi apresentada a definição geométrica e os passos da construção da curva tendo como base essa definição. A partir dessa construção foi feito um estudo das curvas por meio de dois tratamentos, o geométrico e o algébrico. Com o primeiro deles é possível determinar os elementos e propriedades das curvas executando o roteiro apresentado neste texto. No tratamento algébrico constrói-se uma definição algébrica para a cônica utilizando os parâmetros obtidos na construção geométrica. A partir desta nova definição pode-se determinar uma expressão para representar a curva que poderá, agora, ser explorada algebricamente.

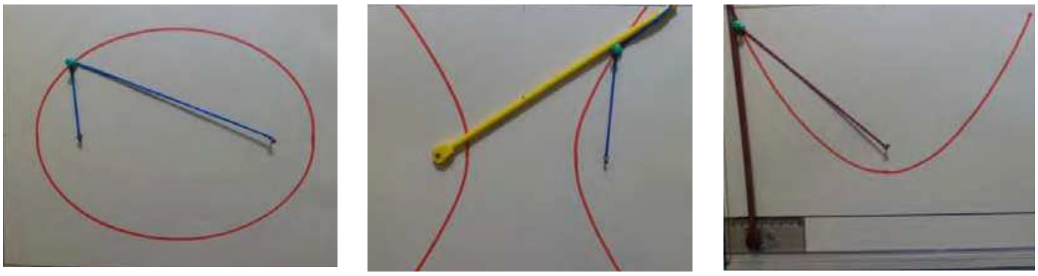

Figura 1: Elipsógrafo, hiperbológrafo e parabológrafo

Elipse

Definição 1. *Elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos.*

Com base na definição1, para construir o esboço da elipse serão necessários fixar dois pontos distintos no plano e tomar uma distância *d* maior que a distância entre dois pontos fixados. A distância *d* será igual ao comprimento do fio do elipsógrafo. Sendo assim, pode-se obter esboço da elipse da seguinte forma:

1. Coloque a folha sobre E.V.A(emborrachado) e fixe dois pregos de forma que a distância entre eles seja menor do que o comprimento do fio;
2. Com a ponta do pincel estenda o fio no plano mantendo-o sempre estendido ao máximo conforme a figura 2 abaixo.

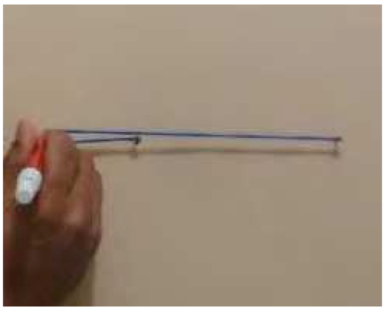

Figura 2: Utilizando o elipsógrafo

3. Movimente pincel de um lado para outro e obterá uma curva fechada no plano conforme a figura 3.

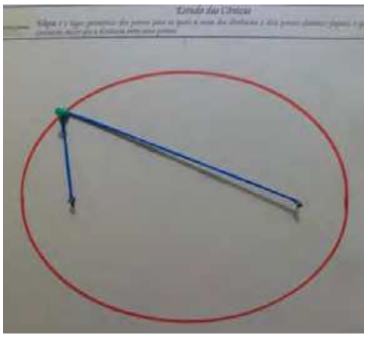

Figura 3: Esboço da elipse

Observa-se que todo ponto P dessa curva satisfaz a definição I da elipse, pois a soma das distâncias de P aos dois pontos inicialmente fixados é igual ao comprimento do fio, que é um valor constante e maior que a distância entre esses dois pontos. Os dois pontos inicialmente fixados serão denominados *focos* da elipse e o segmento por eles determinado de *segmento focal.*

Tratamento geométrico

1) Trace a reta suporte do segmento focal da elipse e a mediatriz deste segmento. A interseção destas duas retas é o centro da elipse. Nomeie o centro de *O*.

2) Identifique no esboço da elipse os seguintes elementos:

   $A_1 A_2$ = eixo maior – medindo 2*a*;

   $B_1 B_2$ = eixo menor – medindo 2*b;*

   $F_1 F_2$ = segmento focal – medindo 2c*;*

3) Usando a definição I mostre que o segmento $B_1F_1 = B_1F_2$ tem medida igual a 2*a*.

4) Encontre a relação matemática entre as medidas *a*, *b* , e *c* da elipse.

Tratamento algébrico

1) Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos num plano cartesiano e $2c > 0$ a distância entre eles. Considere a um número real tal que $a>c$ e d a distância euclidiana. Sendo assim, com base na definição 1 escreva a definição analítica para elipse.

2) Tendo em vista a definição elaborada no item 5 suponha que a elipse esteja posicionada no plano cartesiano de forma que seu centro coincida com a origem do sistema e que os focos F_1 e F_2 esteja sobre o eixo x. Em seguida encontre a equação reduzida da elipse.

Material utilizado: 2 pregos tamanho 10x10, E.V.A com 30cm x 50cm x 2cm, cartolina 30cm x 50cm e barbante inextensível de 20cm.

Hipérbole

Definição 2. Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos para os quais a diferença das distâncias a dois pontos distintos fixados é em valor absoluto igual a uma constante, menor que a distância entre estes pontos fixados.

Com base na definição 2 e utilizando o hiperbológrafo pode esboçar trechos dos ramos de uma hipérbole da seguinte forma:

1. Marque dois pontos distintos num plano a uma distância maior que diferença entre os comprimentos da haste e do fio do hiperbológrafo;

2. Fixe a extremidade da haste e a extremidade do fio uma em cada ponto marcado conforme ilustra a figura 4;

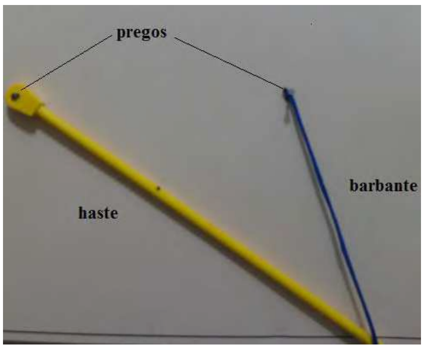

Figura 4: Hiperbológrafo

3. Com a ponta do pincel puxe o fio junto da haste. Mantendo o pincel nestas condições movimente-o de forma que haste rotacione no sentido anti- horário em torno do ponto onde foi fixada.

4. Rotacione a haste no plano no sentido contrário ao escolhido no item anterior mantendo a ponta do pincel junto da haste. Observe a figura 5.

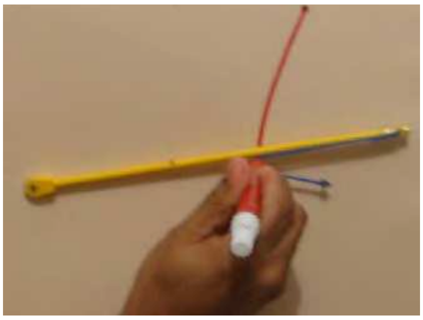

Figura 5:Construção do ramo direito da hipérbole

5. Inverta a posição da haste e do fio em relação aos pontos fixados e execute novamente o processo a partir do item 3 conforme a figura 6.

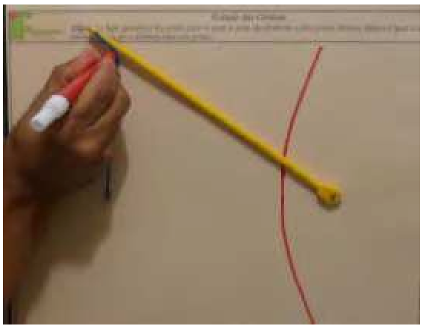

Figura 6: Construindo o ramo esquerdo da hipérbole

Assim, determinam-se trechos de uma curva com dois ramos nos quais se observam que todo ponto *P* desses ramos satisfazem a definição 2 da hipérbole. De fato, a diferença entre as distâncias de *P* aos dois pontos inicialmente fixados é igual ao comprimento da haste menos o comprimento do fio. Veja a figura 7.

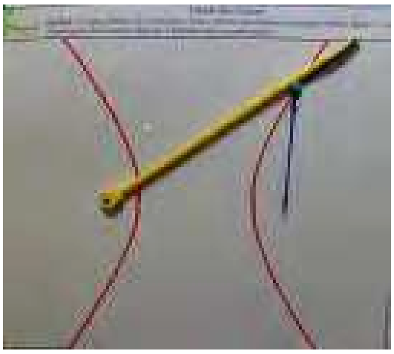

Figura 7: Esboço da hipérbole

Considere F_1 e F_2 os dois pontos inicialmente fixados, *h* o comprimento da haste e *f* o comprimento do fio que vai de F_1 até A. Desta forma, para um ponto P sobre a hipérbole observa-se que :

$$PF_2 - PF_1 = (h - AP) - (f - AP) = h - f = \text{constante.}$$

Os pontos fixados F_1 e F_2 serão denominados de *focos* da hipérbole e o segmento determinado por eles de *segmento focal.*

Tratamento geométrico

1) Trace a reta suporte do segmento focal da hipérbole e a mediatriz deste segmento. A interseção destas duas retas é o centro da hipérbole. Nomeie o centro de *O*.
2) Identifique no esboço da hipérbole os seguintes elementos:

   $A_1 A_2$ = eixo transverso – medindo 2*a*;

   $B_1 B_2$ = eixo conjugado – medindo 2*b;*

   $F_1 F_2$ = segmento focal – medindo 2c*;*

3) 3) Encontre a relação matemática entre as medidas *a*, *b* , e *c* da hipérbole.

Tratamento algébrico

1) Defina analiticamente a curva hipérbole e obtenha a equação reduzida para a mesma.

Material utilizado: 2 pregos tamanho 10x10, E.V.A com 30cm x 50cm x 2cm, cartolina 30cm x 50cm, 1 Agulha para tricô nº 6 de 24cm e barbante inextensível de 15cm.

Parábola

Definição 3. Fixados uma reta e um ponto não pertencente a ela denomina-se parábola o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes da reta e do ponto fixados.

Pode-se esboçar um trecho de uma parábola da seguinte forma:

1. Trace uma reta no plano não pertencente a esta reta.
2. Prenda a extremidade o fio no ponto marcado e com a ponta do pincel mantenha o fio sempre esticado e apoiado na lateral da régua T. Veja a figura 8

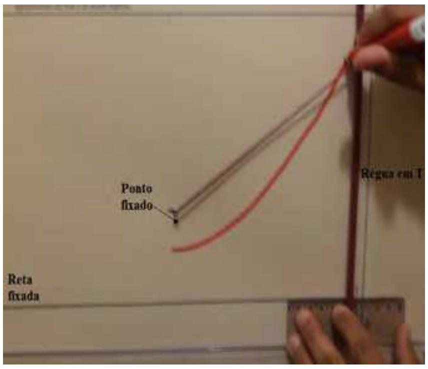

Figura 8: Utilizando o parabológrafo

3. Movimente a régua puxando-a para direita mantendo o fio sempre esticado e junto apoiado na lateral da mesma.

4. Movimente a régua para a esquerda conforme a figura 9.

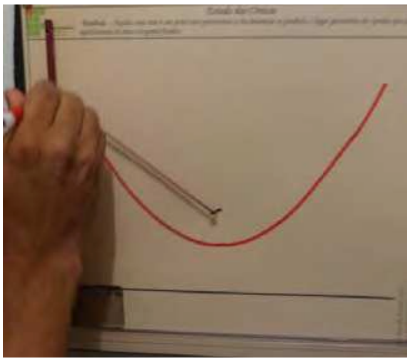

Figura 9: Esboçando a parábola

Os pontos da curva obtida por pertencem a uma parábola, pois todo ponto P sobre a curva é equidistante do ponto F e da reta r, uma vez que o fio tem comprimento igual a distância que vai de A até a extremidade da régua T.

A reta fixada será chamada de *diretriz* da parábola e o ponto fixado será chamado de *foco*.

Tratamento geométrico

1) Construa o eixo de simetria da parábola e estabeleça o seu parâmetro.

Tratamento algébrico

1. Defina analiticamente a parábola e obtenha sua equação reduzida desta curva.

Material utilizado: 3 pregos tamanho 10x10, E.V.A com 30cm x 50cm x 2cm, cartolina 30cm x 50cm, 1 régua de 10 cm, 1régua de 40cm, 1 agulha para tricô nº 6 de 24cm e barbante inextensível 20 cm.

Conclusão

Por meio dessas ferramentas de desenho pode-se visualizar facilmente que se tomarmos um ponto qualquer sobre a curva esboçada tal ponto irá satisfazer a definição da mesma. Com isso, podem-se determinar os parâmetros geométricos das cônicas e em seguida utilizá-los para obter as expressões algébricas dessas curvas. Desta forma, o aluno pode perceber a importância das definições na matemática e compreender melhor o tratamento algébrico das curvas.

Referências bibliográficas

Boulos, P. e Camargos, I. (2005). *Geometria analítica* (3ªed.) São Paulo: Prentice Hall.

Chalouh, L. e Herscovics, N. (1994). Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: A. F. Coxford; A. P. Shulte. *As ideias da álgebra* (pp. 37-48), São Paulo: Atual editora.

Duval, R. (2003). *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: S. D. A. Machado. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica (pp. 11-33), Campinas SP: Editora Papirus

Iezzi, G. (1993). Geometria Analítica (4ª ed). São Paulo SP: Atual editora

Murdoch, D. (1969). *Geometria Analítica.* Rio de Janeiro: Editora LTDA.

Lima, E. (2006). *Geometria Analítica* e *Álgebra Linear* (2ª ed). Rio de Janeiro: IMPA.