OTROS SIGNIFICADOS EPISTEMOLÓGICOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Carlos Rondero Guerrero, Rosalba López Gómez
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
Secretaría de Educación Jalisco
ronderocar@gmail.com, rlopezgomez@yahoo.com

Resumen. El cálculo de áreas ha sido desde tiempos remotos un problema a resolver. Arquímedes es reconocido como el iniciador del cálculo integral, de modo tal que variantes de sus ideas originales se reflejan particularmente en el método de cuadraturas. En este artículo se hace un recorrido histórico-epistemológico del cálculo de áreas bajo las curvas de parábolas genéricas $y=x^k$, y de sus inversas, hipérbolas genéricas, $y=x^{1/k}$, para realizar el rescate de diferentes significados de la integral definida y así propiciar su instalación en la didáctica del cálculo.

Palabras clave: epistemología, promediación, didáctica, significados

Abstract. Calculating of areas has been a problem to solve since ancient times. Archimedes is recognized as the initiator of integral calculus, so that other variants of his original ideas its reflected particularly in the method of quadratures. In this paper its make a historical and epistemological route of the calculating of areas under the curves of generic parabolic $y=x^k$, and his inverse, generic hyperbolic, $y=x^{1/k}$, to do a rescue of other meaning of the definite integral and thus propitiate his installation in the didactic of Calculus.

Key words: epistemology, average, didactic, meanings

Introducción

Se parte de la consideración de que el problema relacionado con el cálculo de áreas, ha sido estudiado en diferentes épocas y desde las perspectivas de varios autores, hasta llegar a las grandes aportaciones de Newton y Leibnitz a lo usualmente se le llama el descubrimiento del cálculo. En este trabajo se hace un breve recorrido sobre autores como Arquímedes, Bernoulli y Wallis, para mostrar como a partir de sus métodos se hacen evidentes algunos de los significados de la integral definida. Finalmente se contrasta con otro método que se desprende de la noción de promediación, y al que denominamos media potenciada. A partir de tales perspectivas es posible realizar propuestas para su posible incorporación a la didáctica del cálculo, particularmente en lo que se refiere a la integral definida.

La perspectiva de Arquímedes

Históricamente desde tiempos remotos se ha venido estudiando un problema denominado de las cuadraturas aritméticas. Arquímedes usó las fórmulas de la suma de enteros y de sus cuadrados,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\;;\;1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para establecer resultados equivalentes a las integrales, Edwards (1979),

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}; \qquad \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

Sin embargo, el método de cálculo de Arquímedes conlleva trabajar con desigualdades como las que hace mención en una carta dirigida a Eratóstenes, Torija (1999), *Arquímedes explica que las razones entre los* volúmenes de estos cuerpos y los de los conos pueden encontrarse por medio de *procedimientos de estática; pero en el trabajo Sobre los conoides y esferoides se propone comparar los volúmenes por procedimientos puramente geométricos.*

Es en esta ocasión cuando más se aproxima al cálculo integral moderno, al colocar el volumen que quiere estudiar entre dos series de cilindros inscritos y circunscritos, estos volúmenes difieren tan poco como se quiera, lo que le permite establecer las desigualdades:

$$\frac{n^2}{2} < 1+2+3+\cdots+n < \frac{(n+1)^2}{2}; \quad \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$$

con lo que Arquímedes llega prácticamente a establecer el concepto de integral definida.

De lo anteriormente señalado, resulta entonces viable preguntarnos acerca de la forma en que se pueden emplear estas desigualdades para el cálculo de integrales definidas y poder así dar alguna evidencia de que efectivamente Arquímedes contribuyó a establecer los elementos básicos del cálculo integral. La demostración de la primera desigualdad es más o menos inmediata, considerando que,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

De manera tal que,

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n^2}{2},$$

pues se le está agregando a $\frac{n^2}{2}$, un término positivo $\frac{n}{2}$.

En forma parecida para el lado derecho de la doble desigualdad,

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} < \frac{(n+1)^2}{2} = \frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2}$$

Luego entonces,

$$\frac{n^2}{2} < \frac{n(n+1)}{2} < \frac{(n+1)^2}{2}$$

O sea que efectivamente se cumple la desigualdad de Arquímedes,

$$\frac{n^2}{2} < 1+2+3+\cdots+n < \frac{(n+1)^2}{2}$$

Ahora bien, se puede ocupar esta desigualdad para establecer la integral de *f(x)=x*, en el intervalo *[0,1]*. Si dividimos entre n^2, se obtiene,

$$\frac{1}{2} < \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} < \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

Al realizar una equipartición del intervalo de integración *[0,1],* en n subintervalos de igual tamaño 1/n, de manera tal que los extremos quedan dados por *0/n, 1/n, 2/n, 3/n,* …, *n/n* , se tiene es posible tener a su vez *n* rectángulos todos de base fija *1/n* y alturas, *1/n, 2/n, 3/n, …, n/n,* cuyas respectivas áreas son,

$$A_1 = \frac{1}{n}\frac{1}{n};\; A_2 = \frac{1}{n}\frac{2}{n};\; A_3 = \frac{1}{n}\frac{3}{n}\;;\ldots;\; A_n = \frac{1}{n}\frac{n}{n}$$

La suma de las *n* áreas de los rectángulos correspondientes son,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\frac{3}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{n}{n}.$$

Retomando las desigualdades de Arquímedes se obtiene,

$$\frac{1}{2} < \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} < \frac{n^2+2n+1}{2n^2}$$

las que se expresan de la forma,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\frac{3}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{n}{n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

Se cumple que,

$$\frac{1}{2} < \mathrm{A} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

Esta última desigualdad posibilita el realizar un paso al límite cuando $n \to \infty$, que resulta bastante accesible, además aparece el resultado de que si un valor A está acotado por la izquierda y por la derecha y si después de tomar el límite ambos tienden a un mismo valor ½, entonces *A=1/2*.

Por tanto el área total que coincide con el área bajo la curva es,

$$A = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Siguiendo un procedimiento similar, para el caso de la función *f(x)=x²*, si se quiere calcular el área bajo la curva en el intervalo *[0,1]*, y tomando en consideración la segunda desigualdad de Arquímedes que se obtiene al dividir entre n^3,

$$\frac{1}{3} < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} < \frac{(n+1)^3}{3n^3},$$

queda,
$$\frac{1}{3} < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^2}$$

O sea,
$$\frac{1}{3} < A < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^2}.$$

Al tomar el límite del lado izquierdo de la desigualdad cuando $n \to \infty$, se concluye que, *A=1/3,* de donde,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

La perspectiva de Bernoulli

Posteriormente muchos siglos después, Jakob Bernoulli, expresa la suma de los primeros *n* enteros y la suma de sus cuadrados de la forma,

$$\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n; \qquad \int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Donde el símbolo usado por Bernoulli, $\int n$, tiene el significado de $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, o bien, $\int n^2$, se relaciona con, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

Y además se cumple que la suma de los coeficientes en cada una de las sumas correspondientes es siempre uno.

Las mismas expresiones se pueden representar de la siguiente forma,

$$; \frac{1}{n^3}\int n^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Es posible calcular en forma similar las integrales definidas correspondientes de *f(x)=x* y *f(x)=x*^{2}, al realizar la misma equipartición el intervalo de integración *[0,1],* lo que arroja por supuesto los mismos resultados antes encontrados usando las desigualdades de Arquímedes.

En ambos casos estas dos cuadraturas tienen como consecuencia que al calcular los límites cuando $n \to \infty$, se obtienen los resultados esperados,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

La perspectiva de Wallis

Wallis en su famoso libro Arithmetica infinitorum, usa la razón del cuadrado de los indivisibles, que usa para calcular la integral,

$$\int_0^1 x^2 dx$$

El método se expresa de la forma,

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\mathrm{L}\ +n^2}{n^2+n^2+n^2+\mathrm{L}\ +n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Lo que le permite calcular cuando $n \to \infty$, la integral definida, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Por otra parte, desde su propia perspectiva, Wallis uso la siguiente notación para calcular el área bajo la curva de una función y su inversa, así como la figura correspondiente referida a un cuadrado de área uno, Edwards (1979),

$$\int_0^1 x^{1/k} dx + \int_0^1 x^k dx = 1$$

De donde, usando el resultado previo,

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k}$$

se tiene que,

$$\int_0^1 x^{1/k} dx = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(1/k)+1} = \frac{k}{k+1}$$

Desde esta perspectiva geométrica, siguiendo los mismos resultados, se tiene que las integrales definidas de las funciones de la forma *f(x)=x*^{k} llamadas parábolas genéricas, cuando se integran en el intervalo, y de las hipérbolas genéricas *f(x)* =*x*$^{1/k}$, en el intervalo, toman la forma,

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}; \qquad \int_0^{a^k} \sqrt[k]{x}\, dx = \frac{k}{k+1} a^{k+1}$$

Es así como se puede realizar una doble operación, la integral de su función original y la de su inversa, siempre en el entendido de que la suma de ambas áreas es igual al área total de un rectángulo de base *a* y altura *a*^{k}, esto es, $A= a.a^k= a^{k+1}$

$$\int_0^a x^k dx + \int_0^{a^k} x^{1/k} dx = a^{k+1}$$

o bien,

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{k+1} a^{k+1} + \frac{k}{k+1} a^{k+1} = \frac{k+1}{k+1} a^{k+1} = a^{k+1} = A_t$$

La perspectiva de la promediación

Si desde esta mismo acercamiento se analiza el caso de la integral definida de cada una de las funciones *y=x* y *y=x*^{2}, en el intervalo de integración *[a ,b],*

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}; \qquad \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

bajo el entendido de que ahora el tamaño del intervalo es *b-a*, si se divide entre ese valor se obtendrá una altura promedio,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(a+b)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Analizando las anteriores expresiones, Rondero (2001), se puede considerar que el área bajo la recta *f(x)=x*, toma la forma de un trapecio que resulta de la semidiferencia de cuadrados $\frac{b^2-a^2}{2}$, que a su vez tiene un área equivalente a la de un rectángulo de base *b-a* y altura promedio $\frac{a+b}{2}$.Para el caso de la función $f(x)=x^2$, el área bajo la curva ya es un sector parabólico cuya área puede ser calculada con un rectángulo de área igual a la base b-a, por la altura promedio $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$.

Como se puede observar el cálculo del área bajo la curva, al menos para las parábolas generalizadas $f(x)=x^k$, en el intervalo *[a ,b],* siempre se puede expresar como el área de un rectángulo de base *b-a* multiplicada por la correspondiente media aritmética potenciada $M_k(a,b)$, que se puede evaluar para cada valor de *k* por medio de la relación,

$$M_k(a,b) = \frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{k} a^{k-n}b^n$$

Resulta también interesante preguntarse sobre la forma que adquiere la altura promedio para las funciones inversas, $y=\sqrt[k]{x}=x^{1/k}$, si del cálculo del área bajo la curva ya analizada,

$$\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = \frac{k(b^{k+1}-a^{k+1})}{k+1}$$

si se divide entre el tamaño del intervalo de integración, $b^k - a^k$, se tiene,

$$\frac{1}{b^k-a^k}\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = \frac{k(b^{k+1}-a^{k+1})}{(k+1)(b^k-a^k)}$$

desarrollando el segundo término la expresión que representa una altura promedio queda de la forma,

$$\frac{1}{b^k-a^k}\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = \frac{M_k(a,b)}{M_{k-1}(a,b)}$$

o bien, $$\int_{a^k}^{b^k} \sqrt[k]{x}\,dx = (b^k-a^k)\frac{M_k(a,b)}{M_{k-1}(a,b)},$$

En todos los resultados anteriores de una u otra forma aparece el teorema del valor medio para integrales, en el que se hace referencia a la forma de calcular la altura promedio de una función continua *f(x)* en el intervalo de integración *[a ,b],* de manera que existe un valor *c* en *(a, b),* tal que,

$$\overline{f(c)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \text{ , o bien, } A = \int_a^b f(x)dx = (b-a)\overline{f(c)}.$$

Reflexiones finales

El desarrollo histórico-epistemológica de este trabajo permite hacer una contribución a la didáctica del cálculo en el sentido de ampliar la perspectiva conceptual de la integral definida retomando las contribuciones de varios autores.

En la didáctica actual del cálculo, particularmente de la integral definida, existe una seria limitación en los estudiantes respecto a los significados asociados a la misma.

Se ha hecho un rescate epistemológico de significados de la integral definida en términos del área bajo la curva de parábolas genéricas $y= x^k$, vistas como áreas proporcionales de rectángulos de base *a* y altura a^k.

En un enfoque rescatado de Wallis, se presenta una significación de parábolas genéricas $y= x^k$, y de sus inversas, las hipérbolas genéricas $y=x^{1/k}$, como áreas bajo la curva que son entre sí complementarias del área total del rectángulo de base *a* y altura a^k.

Referencias bibliográficas

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Rondero, C. (2001). *Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales <ponderatio> y <aequilibrium> en la constitución del saber físico matemático*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo.* Madrid: Nivola.