f y f(x): f(x) DETERMINA A f Y A SU VEZ LA OBSTACULIZA

Alex Montecino M., Ricardo Cantoral U.
Cinvestav-IPN México
montecino@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Este trabajo, es parte de una investigación enmarcado en la teoría socioepistemológica, orientado a estudiar la relación existente entre *f* y *f*(*x*), que representan respectivamente, la función y su imagen, enfatizando cómo estos interactúan mediante los diferentes usos que se le otorga, donde cada uso propicia a una significación contextualizada de cada signo. Nos centraremos en el análisis de los roles desempeñados en diferentes contextos, el uso asignado y la argumentación que le sustenta. El interés por esta problemática surge de una experiencia de aula donde se observó la existencia de una confusión entre una noción de función con un procedimiento, en el contexto del cálculo de sólidos de revolución, ahí se confundió la imagen, *f*(*x*), con la función (Andrade y Montecino, 2009).

Palabras clave: significación contextualizada, usos, dialéctica y prácticas

Abstract. This work is part of a research framed in the socioepistemological theory, oriented to study the relationship between *f* y *f*(*x*), representing, respectively, the function and its image, and how they interact with the different uses that it's give to these signs, where each use conduce to a contextualized meaning of each sign. We will focus on the analysis of the roles played in different contexts, the use assigned, argumentation that can be inferred. The interest in this problem arises in a classroom experience, where was observed the existence of a confusion between the notion of function with a procedure, in the context of the calculation of revolution solids, there was confused the image *f*(*x*) with the function (Andrade y Montecino, 2009).

Key words: contextualized signification, uses, dialectic y practices

Introducción

El siguiente trabajo toma como premisa central: que la noción de función se resignifica y robustece a la luz de las prácticas y actividades en las que se ve inmersa. En ella se puede observar diferentes significados que se ponen en juego de los signos *f* y *f*(*x*), representando respectivamente la función y su imagen. Por ende, los signos mencionados, interactúan constantemente y con ello significándose uno al otro bajo una relación dialéctica. Esta forma de considerar a los signos toma sentido, ya que *“la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación”* (Cantoral y Farfán, 1998).

La investigación está orientada a estudiar la relación existente entre *f* y *f*(*x*) y cómo estos interactúan mediante los diferentes usos que se le da, donde a su vez cada uso propicia a una significación contextualizada de éstos signos, viéndose reflejado en las argumentaciones que sustentan y respaldan las prácticas con las que se construye el conocimiento.

Los signos en estudio viven y se significan en el ámbito académico, dentro de un proceso de dualidad entre lo escolarizado y el cotidiano, o sea, los signos se dotarán de significados, por una parte, a través del uso que se le da en el discurso Matemático Escolar (dME) dentro de las diferentes actividades y prácticas; y por otro lado en el uso que se le da en las prácticas diarias. Adicionalmente se puede evidenciar que en el dME es escaso el tratamiento sobre cómo se dotan de significado los diferentes roles que pueden cumplir f y $f(x)$, ya que la argumentaciones de los usos de estos signos no se presentan de forma explícita, sino más bien se deben inferir a la luz de los mismos usos, prácticas y contextos en el que se ven inmersos, lo que nos lleva a hablar sobre un discurso matemático subyacente (dMS). De lo antes mencionado se afirmará que existen carencias de argumentos explícitos dentro del dME para construir y fundamentar los roles de f y $f(x)$, junto con ello generar sus significaciones.

Sin duda los usos y significados se desarrollan a la luz de prácticas y actividades en que la función cumple algún rol relacionándose con otras concepciones o nociones. Es durante estos procesos que los signos se robustecen y nutren, dando con ello una multiplicidad de argumentaciones a la hora de hacer usos de estos signos, siendo estas argumentaciones las responsables de sustentar lo que se quiere representar, pero como podemos vislumbrar el uso indiferente de $f(x)$ en los diferentes contextos favorece a que se entienda a este signo como la función. Más aún, la evidencia recolectada arroja la premisa de que se invisibiliza el carácter portador de significado de f que posee $f(x)$ y que a su vez, paradójicamente, impiden la construcción de ésta, es decir, los diferentes roles jugados por $f(x)$ dotan de significado a f. Se concluye que sólo estudiando las imágenes se puede hablar de las propiedades de la función, pero a su vez ello obstaculiza su construcción plena, a modo de ejemplo de lo antes mencionado, al momento de decir que la imagen "se mueve" se dice que la función "es variable", pero la f "no se mueve", lo que sí cambia son las imágenes, es decir $f(x)$, ya que f es sólo una triada formada por una regla específica, un dominio de aplicación y un contra dominio o imagen.

Sobre la relación dialéctica existente entre estos signos es que fundamentamos nuestra problemática, ya que no podemos conceder, una sin la otra; no podemos caracterizar a una función f, o hablar de sus propiedades, sin realizar un estudio de su imagen $f(x)$, en donde los diferentes roles que puede jugar $f(x)$ dotarán de significado a f, está claro que perdería sentido hablar solamente de un $f(x)$, si no encuentra definida la f que le subyace.

Nuestra problemática surge al reconocer que la construcción de significado está en constante desarrollo, además el proceso de significación es socialmente construida y distribuida, relacionadas con las actividades humanas y sus prácticas, siendo esto lo que norma el cómo se están divulgando, significando, entendiendo y haciendo uso de los signos. Inclusive, no podemos desconocer que los conocimientos matemáticos, en este caso el de función, se han ido construyendo sobre ideas previas o bien contra ellas, sobre la base de los intereses, cuestionamientos, problemas, posibilidades y limitaciones de cada cultura y época (Sastre, Rey y Boubée, 2008). Su desarrollo no se puede concebir como algo aislado, de forma lineal ni estática, sino más bien relacionándose con otros conceptos y concepciones.

Se hace necesario observar el desarrollo epistemológico del concepto de función, poniendo énfasis en las diferentes concepciones de función, su evolución, en los roles de f y $f(x)$ y cómo se le están dando significados a estos signos matemáticos (*"un signo puede ser un símbolo matemático, una afirmación matemática, una expresión matemática, el nombre de un objeto matemático, entre otras cosas"* (Berger, 2004)), y cuáles son sus usos. Para este estudio se considero las concepción del concepto de función y su transformación desde que Leibniz lo introduce hasta la definición conjuntista de Bourbaki, para este caso no se considerara la noción de función antes de Leibniz, ya que, *"Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva; la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta"* (Farfán y García, 2005).

Nuestra investigación se sustenta en la idea de enlazar aspectos sociales del conocimiento matemático, sus signos y la construcción de éstos, abriendo la discusión en base a las nociones de significación, relación dialéctica de los signos f y $f(x)$, y todo esto bajo una perspectiva socioepistemológica. Las preguntas que orientarán este estudio son: *¿Cómo se significan f y $f(x)$ a la luz de los diferentes usos que se le dan? y ¿cómo se relacionan los signos y cómo ha sido su construcción?*

Para evidenciar la relación existente entre los signos se realizará en una primera instancia una búsqueda de carácter histórico, lo que implica reconocer y dar cuenta de las circunstancias que rodean tanto la gestación de un determinado saber, como los procesos de institucionalización que se vio sometido, por lo cual, se analizará, al hombre haciendo y usando matemáticas en un contexto social específico y no sólo a la producción matemática final que logra, donde el análisis de los usos del conocimiento matemático en situaciones socioculturales específicas permite dar cuenta que éste no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales de forma aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno del desarrollo de ciertas prácticas (Buendía y Montiel, 2009). En una segunda instancia se analizarán textos que son utilizado dentro del discurso matemático actual, el cual se ve presente dentro del dME, este discurso no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula, sino que se extiende al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martín-Serra, 2006)

Con el análisis realizado se dan evidencias que fundamentan la significación contextualizada del los signos, lo que se lleva a cabo al mirar desde una perspectiva sistémica el cómo se otorga y se está significando a los signos f y $f(x)$ por medio de los usos que se le han otorgado en las prácticas y actividades.

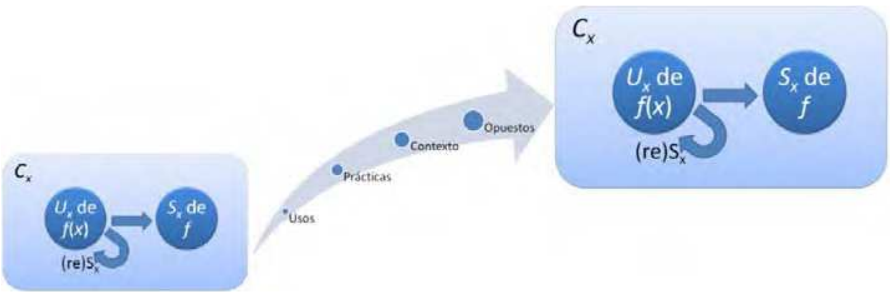
Con el fin de precisar más, se analizaron por una parte, los discursos elaborados por Cauchy (1821, 1823 y 1994) y Bourbaki (2006 y 2007), estas obras surgen como un interés por crear una obra didáctica, la cual se espera, sirva para la formación académica, además de sintetizar el conocimiento de su época y con ello contribuir al desarrollo de las Matemáticas Francesas. Luego nos adentrarnos al *discurso matemático escolar* actual, donde se analizarán los libros de Courant y John (1999) y Stewart (2003). En ambos casos se busca dar evidencia de que los roles otorgado a f y $f(x)$ estarán dando una significación contextualizada de los signos, la que no se encuentra implícita dentro del dME, esta significación ésta respondiendo a una racionalidad que sustenta dichos discursos.

Lo antes mencionado sin duda se verá permeado por la concepción de función con que se esté trabajando, y también por las "ideas" que la sostienen, las necesidades, ideologías y el razonamiento con el que se argumenta los diferentes textos analizados. Podemos ver en los autores Del Castillo y Montiel (2007) el concepto de función puede ser visto como forma de una curva (función geométrica), como fórmula analítica (función algebraica) y como abstracta (función lógica); lo que nos da indicios sobre la racionalidad que subyace a su construcción y los intereses que se tenían en un determinado momento.

Como se comentó anteriormente, el marco teórico tiene como base la Socioepistemología, la cual pone su atención en entender las circunstancias que permitieron que el conocimiento se construyera como se construyó (Cantoral, 2001, p.xxiii), en donde sus objetos de estudios incluye el entender cómo las personas construyen conocimiento matemático en situaciones específicas, y cómo desarrollan una manera matemática de pensar ante situaciones diversas, poniendo en el centro de la discusión, más que los conceptos en sí a las prácticas sociales asociadas con la construcción de dicho conocimiento (Cantoral y López-Flores, 2010), focalizándose en la naturaleza epistemológica, con ello privilegiando una epistemología de prácticas asociada a la construcción de los conocimientos matemáticos, junto con ello retira del centro atención a los objetos matemáticos (Montiel, 2005).

Nuestro trabajo lo centraremos dentro de prácticas matemáticas escolares. Dentro de ellas nos podemos percatar que interactúa el discurso matemático escolar, las nociones del docente, aspectos socioculturales, intereses personales o colectivos, entre otros muchos factores que permean el quehacer dentro del sistema educativo, los que matizan la significación que se le da a los signos. El estudio de estos signos se hace indispensable, ya que consideramos en ellos un doble papel, por un lado su función como herramientas que permite al individuo participar en prácticas cognitivas, y por otro lado, son parte de esos sistemas que trasciende al individuo y que a través del cual una realidad social es objetivada (Berger, 2004). Además del hecho que el signo matemático tiene una significación cultural que se deriva de su uso establecido en el discurso matemático. Teniendo esto presente, es que levantamos la siguiente hipótesis: la noción de función no se constituye entre los estudiantes, si no hasta que sus usos articulados entre *f* y *f*(*x*) estén bajo el control de las actividades situadas del alumno.

Para dar respuesta a las interrogantes se pondrá el acento en dos nociones que desarrollaremos y estarán dentro de la discusión del trabajo, las que son: significación y dialéctica, más específicamente la noción de relación dialéctica. Como podemos ver en la siguiente figura (figura 1), estos signos se relacionan y se van transformando en función de los usos, prácticas, contextos y relaciones entre opuestos. Resultando con ello una adquisición particular de significados y usos dentro de un campo de aplicación, pero a su vez estarán obstaculizando la adquisición plena de cada significado y de su uso particular, pero es gracia a esta confrontación que las significaciones toman un carácter personal, que idealmente debe estar en coherencia con el discurso matemático, para así adquirir una significación congruente a la socialmente aceptada o institucionalizada.



(Tomado de Montecino, 2012)

Figura 1: Relación dialéctica entre los signos

Como se puede apreciar en la figura 1, el proceso de significación es una relación dialéctica, ya que en el caso de la significación de *f*(*x*), se verá robustecida a la luz de las contraposiciones que existirán en los diferentes usos (U_x) del signo, más aún estas significaciones (S_x) de *f*(*x*) estarán dotando de diferentes significados a la función. La existencia de una relación dialéctica entre los signos *f* y *f*(*x*), nos permite hablar de significaciones que estarán dependiendo de los usos, prácticas y contexto (C_x) en donde se vean inmersos el conocimiento.

Además podemos apreciar que del análisis a los textos se puede establecer categorías de significación, en que muestran y dan a conocer cómo se entiende en cada caso los signos, pudiendo observar cómo han evolucionado la significación de los signos y cómo se están argumentando dentro de estos discursos. Estas categorías surgen desde los diferentes usos que se le da a los signos dentro de los discursos analizados, de los cuales se infieren las siguientes categorías de significaciones:

- Del discurso de Cauchy se significará a $f(x)$ como el valor puntual, una expresión algebraica, la función misma y la altura.
- Del discurso de Bourbaki se significará a f como la función o una aplicación; en el caso de $f(x)$ como un valor específico o puntual, como puntos y las alturas.
- Del discurso actual se significará a f como la función; en el caso de $f(x)$ como el(los) valor(es) numérico(s) o algébrico(s), la distribución de los puntos en el plano, la gráfica, una formula algebraica o miembro de una igualdad, modeladoras de sucesos o cuantificadoras de cambio, el resultado de un procedimiento y como la función.

A modo de conclusión, por una parte, se da evidencia que las significaciones de estos signos es evolutiva, es decir, se desarrollan y relativizan paulatinamente, lo que sucede a través de los diferentes usos que se esté dando al signo y más aún en las actividades o prácticas en la que se vea envuelto el conocimiento matemático. Donde la lucha de opuestos nutrirá la relación existente entre los signos y junto a ello implicará una mutua trasformación.

Dentro del desarrollo del discurso matemático existe un predominio del uso de $f(x)$, en donde inhibe que la noción de función se construya, pero he aquí la dialéctica del asunto, ya que sólo cuando se construyen relaciones entre los usos y significados de $f(x)$ es como se constituye a la noción de función, es decir: f

Por otra parte, la noción de función no se podrá construir o constituir, hasta que se articulen los diferentes usos y significados de f y $f(x)$, donde el dMS sustentará y dará herramientas para la argumentación de las diferentes categorías de significación, este discurso, propicia significaciones que complementan las expuestas en el discurso matemático (discurso oficial), otorgando herramientas para poder argumentar, en ocasiones de forma parcial, concepciones, conceptos y constructos.

Podemos ver que dentro los textos de matemática prevalece la postura de Bourbaki a la hora de precisar o definir el concepto de función, pero al momento de ver las aplicaciones de este constructo, se percibe –a la luz de cómo se están argumentando y se está haciendo uso del conocimiento– que es el enfoque de Cauchy el que prevalece, es decir, mirar a la función como una relación, siendo este objeto matemático representado por $f(x)$, lo que favorece a la poca claridad que existe en cómo se están significando y entendiendo estos signos. Más aún con el hecho de que *f* sólo se ve presente al momento de establecer el concepto de función, refuerza el uso indiferente de *f*(*x*) en los diferentes contextos, lo que propicia un predominio en el uso de este último para referirse a todos los aspectos vinculados a la función. La visión de Bourbaki conlleva en si una crisis del concepto de función, ya que éste cambia el paradigma de racionalidad que le sustentaba.

Referencias bibliográficas

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano: Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Católica Silva Henríquez, Chile.

Berger, M. (2004). The functional use of mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics* 55, 81-102.

Bourbaki (2006). *Théorie des Ensembles*. Editorial N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Bourbaki (2007). *Fonctions d'une variable réelle*. Editorial N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1287-1296.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon. Revista de la S.A.E.M. "Thales", 42*, 353-369.

Cantoral, R. y López-Flores, J. (2010). La Socioepistemología: un estudio de su racionalidad. *Paradigma, 31 (1)*, 103-122

Cantoral, R., Farfán, R.M., Lezama, J., y Martín-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial*, 83-102.

Cauchy, A. (1889). *Cours d'analyse de l'cole royale polytechnique*. Francia: Editions Jacques Gabay.

Cauchy, A (1994). *Curso de Análisis*. Selección, traducción directa del francés y notas por Alvarez, C. MATHEMA, Facultad de Ciencias de la UMAN.

Courant, R. y John, F. (1999). *Introducción al cálculo y al análisis matemático. Volumen 1*. México: Limusa.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 568-579

Farfán, R. y García, M. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 489-493. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montecino, A. (2012). *f, f (x) y su significación. Una relación dialéctica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (2),* 219-233.

Sastre, P., Rey, G.y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, 141-155.

Stewart, J. (2003). *Cálculo de una variable transcendentes temprana*. Cuarta edición. México: Thomson Learning.