LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS

Ángel Homero Flores Samaniego, Adriana Gómez Reyes
CCH-UNAM México
ahfs@unam.mx, orodelsilencio@yahoo.com.mx

Resumen. El objetivo del trabajo que se reporta es ilustrar cómo se puede utilizar la modelación matemática en el estudio de las cónicas, en particular circunferencia y elipse, con la ayuda de un software de Geometría Dinámica. Se darán algunos ejemplos de las actividades de enseñanza llevadas a cabo por estudiantes de Bachillerato (edades entre 16 y 17 años) y cómo se pueden utilizar instrumentos de evaluación formativa (rúbricas, listas de cotejo, bitácoras y matrices de resultados, entre otras; SEAM, 2010) para facilitar el análisis de los resultados de las actividades.

Palabras clave: modelación, cónicas, investigación en el aula

Abstract. The work reported aims to illustrate how you can use mathematical modeling in the study of the conical, in particular circle and ellipse, with the help of Dynamic Geometry software. Will be examples of teaching activities applied with high school students (aged 16-17 years) and how you can use tools of formative assessment (headings, comparison lists, blogs and matrices of results, among others; SEAM, 2010) to facilitate the analysis of the results of the activities.

Key words: modeling, conical, classroom research.

Introducción

La modelación matemática, entendida como el proceso de construcción de un modelo matemático que servirá para estudiar o explicar un fenómeno ha venido tomando fuerza como una estrategia de enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos (Alsina, García, Gómez y Romero, 2007; Bloom, Galbraith, Henn y Niss, 2007; Bolea, Bosch y Gascón, 2004; Ortiz, Rico y Castro, 2008). Más que enseñar a modelar a los estudiantes, la intención es que ellos utilicen la modelación como un medio para aplicar la matemática que saben y aprendan la que les sea útil para modelar fenómenos.

El Seminario de Evaluación Alternativa en Matemáticas (SEAM) está conformado por un grupo de profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), preocupados por nuestra propia formación pero más aún por el aprendizaje logrado por nuestros estudiantes, quienes están inscritos en uno de los dos sistemas de bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). En este seminario estamos convencidos de que una evaluación eficiente y acorde con un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en el estudiante hará visible el alcance logrado con respecto al desempeño del estudiante, del profesor; y con respecto a la efectividad del material de enseñanza.

En el SEAM se desarrolló un modelo de enseñanza que hemos denominado Aprender Matemática, Haciendo Matemática en el cuál la resolución de problemas juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. En particular, los problemas de modelación han probado ser un medio efectivo para que el estudiante aprenda matemática.

En este contexto hemos caracterizado los problemas de modelación en dos tipos: *piensa y actúa*, y *ajuste de curvas*. En los problemas de piensa y actúa, se puede proponer un modelo a partir del enunciado del problema o del estudio del fenómeno en cuestión; mientras que en los problemas de ajuste de curvas no se puede proponer de manera inmediata el modelo, por lo que es necesario obtener una serie de datos relativos a las variables involucradas, estos datos se grafican y se busca una curva que los aproxime. En este último caso, la curva y su ecuación, son el modelo que se busca. El conocimiento que se fomenta y se pone en acción en cada tipo de problema de modelación es muy diferente y requiere de razonamiento diferentes.

El objetivo del presente trabajo es ilustrar cómo se puede utilizar la modelación matemática en el estudio de las cónicas, en particular circunferencia y elipse, con la ayuda de un software de Geometría Dinámica.

Se reportarán los avances de una investigación encaminada a responder la pregunta: ¿cuál es el grado de comprensión de circunferencia y de elipse en estudiantes del CCH cuando utilizan la modelación matemática en un ambiente de Geometría Dinámica?

Modelación matemática

En el SEAM definimos Modelación Matemática como el proceso de construcción de un modelo matemático que ayude a explicar y estudiar un fenómeno. Este fenómeno puede ser natural o social.

El modelo matemático puede ser una función, una ecuación, una desigualdad, una tabla, una gráfica o cualquier otro objeto matemático.

El uso de la Modelación Matemática en el aula, como estrategia de aprendizaje, se puede caracteriza según el diagrama de la Figura 1.

Las fases del proceso de modelación son las siguientes:

- identificar el fenómeno que se quiere estudiar,
- convertir los aspectos que nos interesan del fenómeno en un problema a resolver, ya sea planteando preguntas o conjeturas,
- matematizar el problema definiendo las variables involucradas y los datos relevantes para determinar la relación entre ellas,
- proponer un modelo matemático con la información obtenida (modelo intermedio),

- verificar el modelo intermedio para determinar si cumple con las condiciones del problema matematizado, (en caso de que el modelo no sea satisfactorio es necesario regresar a la fase de Matematización con el fin de revisar la pertinencia tanto del problema matemático como la del modelo, en este punto es posible que se forme un ciclo Matematización-Modelo intermedio-Verificación, Ciclo Matemático, que se rompa cuando el modelo intermedio satisfaga la verificación).
- interpretar el modelo intermedio satisfactorio con respecto al fenómeno problematizado, (si la interpretación del modelo no es consistente con el fenómeno problematizado, se entraría en ciclo más amplio Problematización-Ciclo Matemático-Interpretación llamado Ciclo de Interpretación que se rompería cuando el modelo matemático es consistente con el fenómeno).

Figura 1. Proceso de Modelación Matemática

- modelo matemático definitivo obtenido después de la fase de Interpretación.

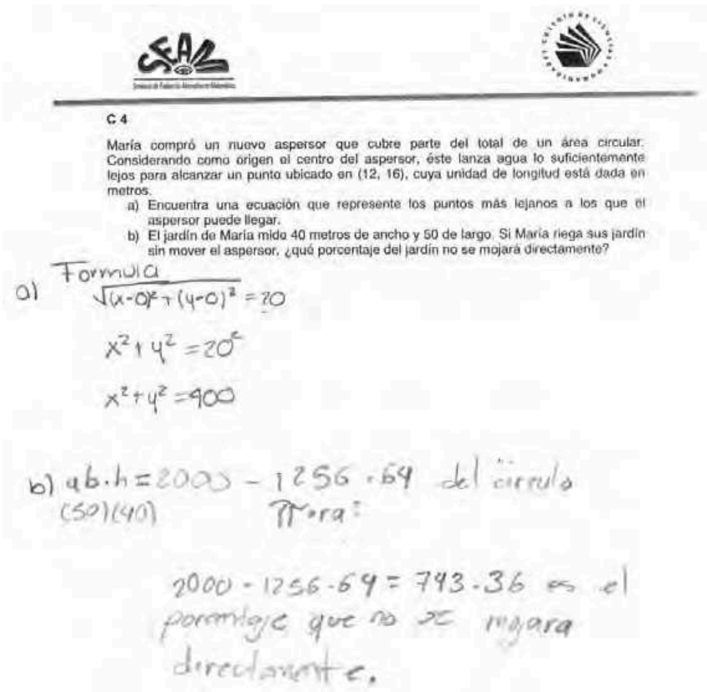
Los objetivos de aprendizaje y el grado escolar del que se trate definirán el énfasis que e pondrá en cada fase. Por ejemplo, en algunos casos se pueden presentar problemas ya matemátizados y poner el énfasis en su resolución; mientras que en otros es posible iniciar el proceso desde el estudio mismo del fenómeno, siguiendo un procedimiento muy parecido al planteado por el aprendizaje basado en problema (ABP) o la enseñanza por proyectos.

Estudio de circunferencia y elipse

Los siguientes ejemplos corresponden a algunas actividades desarrolladas durante el curso de Geometría Analítica que corresponde al tercer semestre del CCH.

La secuencia consta de cuatro actividades relacionadas con la circunferencia y cuatro relacionadas con la elipse; cada una de estas fue elaborada por equipos (entre dos y tres personas), cada equipo contaba al menos con una computadora con el programa Geometer Sketch Pad (GSP), que ya venían trabajando desde varias actividades atrás. En cada una de las actividades se propició la discusión al interior de lo equipos y con el resto del grupo, mientras el profesor atendía el trabajo de lo equipos aclarando las dudas que surgían e incluso llevando información de un equipo, otra función importante del profesor consiste en plantear nuevo cuestionamientos cuando el equipo está cayendo en un error que no han percibido o cuándo tienen frente a si ideas o concepto importantes que se deban destacar. La última actividad de cada uno de los dos temas, se dejó a los equipos trabajar solos (sin la orientación del profesor) con la finalidad de usarla para evaluación.

En la Figura 2 se muestra, a manera de ejemplo, la hoja de trabajo de una de las actividades, con el trabajo presentado por uno de los equipos, donde los estudiante muestran las fórmulas que ocuparon, la ecuación de la circunferencia correspondiente con el problema y la respuesta a las preguntas planteadas.


C 4

María compró un nuevo aspersor que cubre parte del total de un área circular. Considerando como origen el centro del aspersor, éste lanza agua lo suficientemente lejos para alcanzar un punto ubicado en (12, 16), cuya unidad de longitud está dada en metros.

a) Encuentra una ecuación que represente los puntos más lejanos a los que el aspersor puede llegar.

b) El jardín de María mide 40 metros de ancho y 50 de largo. Si María riega sus jardín sin mover el aspersor, ¿qué porcentaje del jardín no se mojará directamente?

a) Formula

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=20$

$x^2+y^2=20^2$

$x^2+y^2=400$

b) ab.h = 2000 − 1256.64 del círculo

(50)(40) πr^2

2000 − 1256.64 = 743.36 es el porcentaje que no se mojara directamente.

Figura 2. Última actividad de Circunferencia

Resultados

Las respuestas presentadas por los estudiantes incluyen, los reportes realizados en las hojas de trabajo tanto como los archivos realizados en el programa por lo que la información para analizar es muy variada y abundante. Este análisis está aún en proceso pero consideramos importante resaltar algunas cuestiones puntuales, a manera de ilustración del trabajo realizado tanto como de los aprendizajes logrados.

La actividad 3 del tema de elipse (E3) tiene el siguiente enunciado:

> *En la tabla se muestran las coordenadas de un cometa en su órbita alrededor del Sol, que se encuentra situado en un foco de la elipse. Para tomar las coordenadas se colocó el origen de coordenadas en el Sol y eje mayor a lo largo del eje x (las unidades de las coordenadas son UA, unidades astronómicas). (a) Encuentra la ecuación que se ajuste a los datos de la*

tabla. (b) ¿Cuál es la mayor distancia del cometa al sol o afelio? (c) Encuentra la excentricidad de la órbita.

x	y	x	y
-2.1	5.5	900.1	36.1
12.9	16.3	982.4	10.9
62.6	31.5	923.4	-31.5
244.5	54.6	663.0	-52.9
579.3	62.0	450.0	-62.8
778.1	51.6	141.6	-44.5

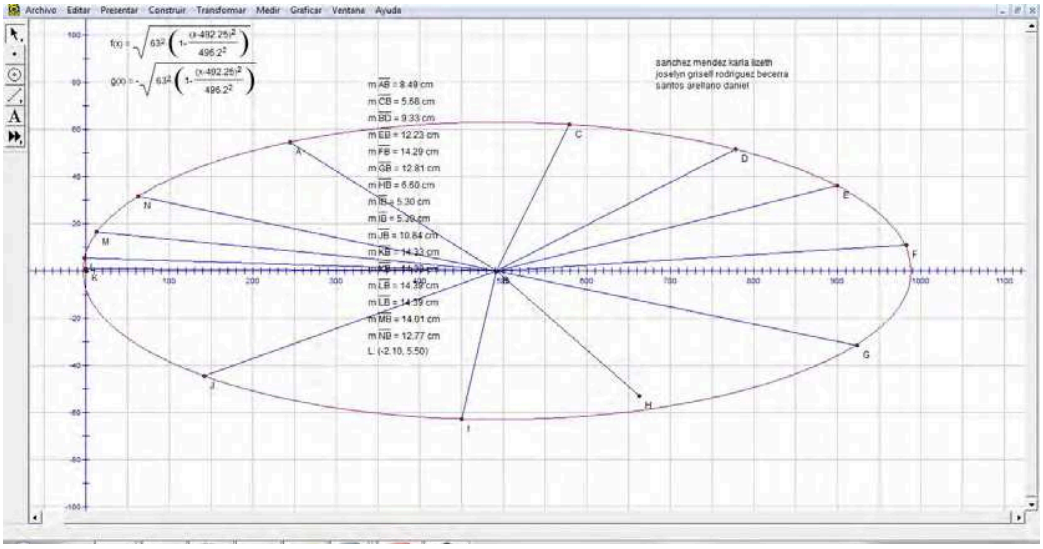


Figura 3. Actividad E3 en el programa

En el programa los estudiante graficaron los puntos indicados y buscaron la ecuación de la elipse que se ajusta a dichos puntos, como se muestra en la Figura 3. En este reporte se puede observar, en particular (Figura 4), como despejan de la ecuación canónica de la elipse para insertarla en el programa en forma de función, dividiéndola incluso en dos funciones (f(x) y g(x)) superando así las limitaciones que podría ofrecerles el programa (solo grafica funciones explicitas), pero superando al mismo tiempo la resistencia que presentan habitualmente los estudiantes a despejar este tipo de funciones y trabajar con los radicales como lo muestran aquí.

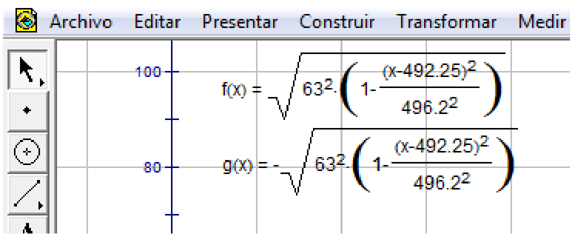


Figura 4. Ecuaciones de la elipse actividad

Otra de las actividades relativas al tema de elipse es la correspondiente a la llamada Capilla de los Susurros (E4) cuyo enunciado es el siguiente:

> *Un recinto tiene forma elíptica con paredes verticales de 2 m de altura y techo elipsoidal. Si el recinto tiene 12 m de longitud y 6 de ancho. ¿Dónde se deben parar dos personas (que no estén una al lado de la otra) para que se puedan secretear sin que nadie las oiga?*

Alguno de los instrumentos de evaluación que se utilizaron para organizar y analizar la información obtenida, fue V de Gowin, como se muestra en la Figura 5.

Capilla de los susurros

Figura 5: V de Gowin correspondiente a la actividad E4

En este instrumento se puede observar, del lado izquierdo, los conceptos que el equipo está utilizando por lo que se puede ver cuáles son los elementos de lo que disponen ante la solución de un problema nuevo; mientras que el lado derecho se observa el proceso seguido hasta la obtención del resultado. En caso particular que se ilustra podemos observar que manejas la ecuación de la elipse, así como los foco y lo ejes (mayor, menor y focal), y el proceso seguido le permite encontrar la distancia entre los foco sin problema, pero no responde la pregunta planteada en el problema, por lo que les puede recomendar que lean con más cuidado y regresen a interpretar lo resultado obtenido en el contexto del problema (penúltima fase del proceso de modelación, Figura 1) para evitar esta omisión en situaciones posteriores.

Conclusiones

Es posible trabajar las cónicas a través de la modelación matemática, lo cual nos da como beneficio adicional, la posibilidad de superar algunos obstáculos que se encuentran cuando se trabaja de forma tradicional (como cuestione algebraicas mostradas en la Figura 4).

En cuanto a la pregunta de investigación planteada originalmente, podemos afirmar que es necesario terminar el análisis que está en proceso ante de dar una repuesta definitiva, pero lo primeros indicios muestran que se logra el aprendizaje y la apropiación de concepto básicos de la circunferencia y elipse, al grado tal de poder utilizarlos en la solución de problemas nuevos.

Agradecimiento. El presente trabajo se enmarca en un proyecto de investigación (Infocab: Proyecto PB100111, UNAM, México) más amplio que busca, entre otras cosas, conocer el papel que juega la modelación y el uso de software de Geometría Dinámica en el entendimiento de algunos conceptos matemáticos; forma parte de las actividades del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) que funciona, desde 2006, en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., García, L. M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA* 54, 51-54.

Bloom, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss M. (2007). *Modeling and applications in Mathematics Education*. New ICMI study series. Springer.

Bolea, P., Bosch, P., y Gascón, J. (2004).Why is modelling not included in the teaching of algebra at secundary School. *Quadernidi Ricerca in Didattica*. 14, 125-133.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2008). *La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación*. *PNA, 2* (4), 181-189.

SEAM. (2010). *Paquete de evaluación*. Producto del Seminario sin publicar. CCH. UNAM: