

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav-IPN
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

México

Resumen. Con el objetivo de tener un marco de referencia para analizar las dificultades para desarrollar el pensamiento variacional en profesores de bachillerato, en este trabajo presentamos los resultados de una caracterización realizada al Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), enfocándonos en aquellas características propias de este pensamiento y la forma en que se desarrolla. Para ello nos apoyamos en la teoría Socioepistemológica, y realizamos un análisis documental de diversos trabajos inscritos en el Pylvar. Los resultados muestran que para desarrollar el pensamiento variacional es necesario el uso sistemático de los elementos del Pylvar, y enfocarse en los procesos de cambio involucrados.

Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, variación, estrategia variacional

Abstract. In order to have a framework to analyze the difficulties to development variational thinking in high school teachers, we present the results of a characterization to Thought and Language Variational, focusing on those characteristics of this thinking and how it develops. We rely on the theory socioepistemological, and perform a documentary analysis of several studies framed in the Pylvar. The results show that the development of variational thinking requires the systematic use of the Pylvar elements, and focus on the processes of change involved.

Key words: thought and language Variational, Variation, Variational Estrategy

Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo identificar las causas que originan las dificultades en profesores de bachillerato para desarrollar un pensamiento variacional, para lo cual consideramos importante entender qué es, en qué consiste, y cómo se desarrolla el pensamiento variacional para tener un marco de referencia que nos permita analizar y comprender la naturaleza de esas dificultades. Con esto en mente, en el presente escrito reportamos los resultados de una caracterización realizada a la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), que nos permitió precisamente establecer ese marco de referencia, identificando aquellas características propias de un pensamiento variacional y la forma en que se desarrolla.

El Pylvar es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. Las situaciones donde se pone en juego el Pylvar permiten significar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos. Por tanto, las ideas de cambio y variación son fundamentales en el Pylvar, pues representa la base en la cual se

sostiene y cuyo estudio permite resignificar los concomimientos matemáticos propios del cálculo. De modo que el Pylvar se caracteriza por centrarse en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios.

El interés por realizar una caracterización del Pylvar ha estado presente desde los primeros trabajos que incorporan esta línea a sus investigaciones, como se puede observar en los trabajos de González (1999) y Salinas (2003), quienes realizan una caracterización de algunos elementos del Pylvar, tales como *estrategia variacional* y *situación variacional*, que representan la base para los posteriores trabajos dentro de esta línea de investigación, pero considerándolas no como definitivas, sino dinámicas, ya que con el desarrollo de nuevos trabajos se encontraría una evolución en estos elementos. Asimismo, con el surgimiento de nuevos estudios, nuevos conceptos han surgido a la par, por lo que una nueva caracterización surge como necesaria para establecer lo que se entiende hoy día por Pylvar. Con base en ello, nos planteamos las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los elementos que caracterizan el Pylvar?
2. ¿Cómo interactúan estos elementos para desarrollar un pensamiento variacional?

El sustento teórico de la investigación se encuentra en la teoría Socioepistemológica, que plantea que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente llamadas prácticas sociales (Cantoral, 2004). Son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto que caracteriza a la Socioepistemología: pasar de los objetos a las prácticas. Es la praxis la que favorece y permite el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cabrera, 2009), en el cálculo esta praxis se refiere a las prácticas propias de la variación.

La caracterización propuesta se realizó en tres fases. Primero se llevó a cabo un análisis a trabajos en Matemática Educativa que incorporan el Pylvar a sus investigaciones. La segunda fase consiste en una recopilación de caracterizaciones realizadas en estudios previos sobre los elementos del Pylvar, que complementamos en conjunto con la revisión de la primera fase. Por último, se elaboró un modelo para sintetizar la caracterización propuesta, enfatizando la forma en que se desarrolla el pensamiento variacional.

Resultados primera fase

En esta fase se analizó la forma en que el Pylvar es usado en diferentes trabajos y cómo se refleja en las actividades, buscando la forma en que la variación se hace presente, los

conocimientos matemáticos puestos en juego, la forma en que la actividad guía el aprendizaje del alumno relacionado con el estudio de la variación, entre otros. Las investigaciones analizadas fueron seleccionadas bajo dos criterios. Primero, aquellos trabajos que realicen un análisis sobre la forma en que el Pylvar es usado por las personas, o en libros. Segundo, trabajos que realicen un diseño de actividades donde se incorporen elementos del Pylvar. Para esta primera fase se tomó como punto de referencia la caracterización que propone Salinas (2003) de *estrategias variacionales*.

- *Comparación*: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados.
- *Seriación*: Se analizan estados sucesivos y se establecen relaciones entre ellos.
- *Estimación*: A partir de conocer el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo.
- *Predicción*: Está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de estados previos.

Por cuestiones de espacio, sólo se presenta el análisis realizado a dos actividades del trabajo de Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein, y Henzenn (2008)

Actividad 1

La gráfica muestra el comportamiento de la función $y = f(x)$. Analice la gráfica y conteste:

- a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -4 a -2 ?
- b) ¿Cuánto cambia f si x cambia de 2 a 3 ?
- c) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -1 a 1 ?
- d) Si x cambia de izquierda a derecha, para qué valores de x , se cumplen las desigualdades siguientes?
 $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$; $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$; $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$.

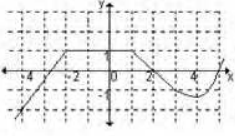


Figura 1: Actividad uno de Engler, et. al. (2008)

Esta actividad muestra la gráfica de una función para propiciar el análisis de los cambios que se producen en la variable independiente y dependiente. Se pregunta por el cambio experimentado al pasar de un punto a otro, y sobre el comportamiento en algunos intervalos específicos. Para esta actividad encontramos el uso de la estrategia de *comparación*, pues el estudiante ha de analizar el estado de la función en dos puntos, uno inicial y otro final, con el fin de establecer diferencias entre esos estados y así argumentar acerca del comportamiento de la función. En el inciso d se pregunta por los valores de x que cumplen las relaciones indicadas, de manera que se requiere el uso de la estrategia de *seriación* para analizar la forma en que cambia la variable en distintos intervalos. Asimismo, la actividad exige de un análisis gráfico para determinar el comportamiento de los valores de la gráfica y dar respuesta a las preguntas. Por último, el conocimiento matemático que entra en juego y que permite al

alumno estudiar la variación de la gráfica es la función, en particular los conceptos de función creciente y decreciente.

Actividad 2

Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla.

Intervalos	Δs	Comportamiento de la función			Signo de $s(t)$
		Crece	Decrece	No cambia	
$0 \leq t \leq 0,5$					
$0,5 \leq t \leq 1$					
$1 \leq t \leq 1,5$					
$1,5 \leq t \leq 2$					

- a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de $s(t)$ y los cambios Δs ?
- b) ¿Es cierto que si $s(t) > 0$ entonces los cambios $\Delta s > 0$? Justifique.
- c) ¿Es cierto que si $s(t)$ crece entonces $\Delta s > 0$ o que si $\Delta s < 0$ entonces $s(t)$ decrece?

Figura 2.: Actividad dos de Engler, et. al. (2008)

Esta actividad relaciona la idea de cómo cambian las variables con la variación de la función, mediante una tabla en donde se debe escribir en que intervalos una función crece o decrece. Observamos el uso de la estrategia de *seriación*, ya que el alumno debe analizar datos sobre el comportamiento de la función en distintos intervalos y así establecer la relación que subyace entre las variables, es decir, cómo cambia una cuando la otra cambia (si la función es creciente, las diferencias son positivas). A diferencia de la actividad anterior, el estudio de la variación se desarrolla en un contexto numérico, donde el alumno realiza una tabla para analizar cómo los valores cambian. El conocimiento involucrado es la derivada, ya que se analiza la forma en que cambian los valores de la función por medio de las diferencias, analizando la relación entre la función y sus diferencias.

Los trabajos analizados permitieron observar que las actividades diseñadas bajo el Pylvar hacen énfasis en el uso de las *estrategias variacionales* para la generación de un pensamiento variacional, apoyadas siempre en el uso de los conocimientos matemáticos que se pretenden resignificar, aun cuando este no es explícito para los estudiantes, pero jugando un papel medular en todo el diseño. Asimismo, el tipo de preguntas que se hacían en los diseños propiciaban siempre el estudio de la variación, pero éste depende en gran medida del contexto en que se desarrolla la situación (gráfico, numérico, analítico) de manera que se aborda la variación de diferente maneras, aunque siempre con las *estrategias variacionales* como punto de partida. Por otra parte, se encontraron elementos de las *estrategias variacionales* que no son descritas en la caracterización de Salinas (2003), como la generación de *argumentos variacionales*, la relación con las *estructuras variacionales*, así como una forma más precisa de diferenciar su uso en situaciones de variación, elementos que se describirán en los resultados

de la segunda fase. Asimismo, el análisis permitió identificar que el estudio de los procesos de cambio son más importante que los estados mismos, de modo que para desarrollar un pensamiento variacional las actividades se centran en los procesos de cambio y no tanto en la manipulación simbólica, de modo que enfatiza en identificar aquello que cambia, cuantificar ese cambio y analizar como varían los cambios. Si sólo se verifica que alguna propiedad o regla se cumple, no hay un pensamiento variacional, ya que no requiere comprender los procesos de variación.

Resultados segunda fase

Para esta fase nos apoyamos el análisis realizado en la fase I, lo complementamos con las caracterizaciones realizadas al Pylvar en diversos trabajos, con lo que se estableció una nueva caracterización de elementos característicos del Pylvar.

Situación variacional (SV): Es el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de *estrategias variacionales* y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio. No basta saber que algo está cambiando, es necesario conocer el crecimiento relativo del fenómeno en cuestión, analizando cuánto y cómo cambia sus variables. Por otra parte, se considera que una situación no es variacional si se puede resolver empleando un proceso algorítmico que lleve a una respuesta sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables. Este tipo de situaciones se pueden presentar tanto en un escenario puramente matemático, como en un contexto relacionado con otros campos científicos o cotidianos.

Argumentos Variacionales (AV): Son argumentos que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación, y que son utilizados por las personas cuando hacen uso de “maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando” (Cantoral, 2000, pp. 54). Estos argumentos son los que permiten dar explicación a las SV expresando un entendimiento de los procesos de variación involucrados en dicha situación.

Códigos Variacionales (CV): Consisten en la expresión oral o escrita del cambio y la variación, y que son articulados para generar los AV. Estos códigos pueden consistir en frases, dibujos, tablas o ademanes, que dan cuenta del análisis variacional que se realiza.

Estructura Variacional Específica (EstV): Son herramientas, procesos y procedimientos especializados del ámbito matemático o científico (González, 1999) que funcionan como punto de apoyo abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en las SV. El uso de estos conocimientos en la situación permite a la persona tener un referente sobre el cual llevar a

cabo el estudio de la variación del fenómeno, de manera que el tipo de análisis dependerá de la estructura en la cual se apoye la persona.

Estrategia Variacional (EV): Consiste en una forma particular de razonar y actuar ante una SV, y que permite la generación de los AV que dan explicación a la situación. Asimismo, para el uso de las EV se recurre al uso de EstV para poder estudiar la variación. Algunas EV reconocidas son la Predicción, la Comparación, la Seriación y la Estimación, aunque no se descarta la existencia de otras estrategias. Estas cuatro estrategias como se mencionó anteriormente son caracterizadas por Salinas (2003), la cual se retoma y complementa con el análisis literario anterior, para formular la siguiente caracterización:

Comparación: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y su variación. Esta estrategia no se usa siempre de la misma manera, ya que su uso depende del contexto en que se encuentra, y también de las nociones y conceptos que la rodean, en ese sentido se puede hablar de un desarrollo de esta estrategia. Así, en un nivel elemental, es frecuente, y en ocasiones necesario, recurrir a un marco de referencia en el cual apoyarse, mientras que un nivel avanzado no requiere necesariamente de algún marco de referencia, o bien, este se elige según las características de cada situación.

Seriación: Se relaciona con la comparación, ya que está asociada con la acción de analizar entre estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos, pero se diferencia que en se analizan varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos, como puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables.

Predicción: Asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. A diferencia de la Seriación, la Predicción no busca encontrar en si una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento o valor determinado. No obstante, hallar esa relación puede ser una forma de encontrar ese nuevo estado, por lo que la Seriación puede ser parte de la *Predicción*.

Estimación: Conociendo el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global, a diferencia de la *Predicción*, donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, se usa en el análisis del crecimiento de poblaciones para saber si crecerá o disminuirá, en tanto que la *Predicción* puede servir para decir hasta que punto crecerá, o la población dentro de un tiempo específico.

Tareas Variacionales (TV): Consisten en actividades, acciones y ejecuciones dentro de una *SV*, que comparten similitudes en cuanto a sus objetivos y los contextos en que se desarrollan. Se caracterizan por el empleo de una o más *EV* dentro de un mismo contexto de análisis, que puede ser numérico, gráfico o analítico, lo que permite organizar el estudio de la variación en las *SV* en acciones y objetivos más específicos dentro de estos contextos. Algunas de las *TV* identificadas son las siguientes:

Tabulación como variación numérica (TVN): Consiste en la acción de proporcionar valores distintos a una variable para observar y analizar sus efectos en cuanto a comportamiento, forma, posición o valor de algún sistema. El análisis surge a partir de observar los efectos derivados de la acciones de tabular, por tanto, si los datos ya están plasmados o la acción corresponde a solo llenar una tabla, entonces no se considera que se trata de una *TV*.

Análisis de datos en tablas numéricas (ADT): Dada cierta información en forma de datos agrupados en tablas numéricas, se realiza un análisis de esos datos fijándose en patrones de comportamiento, y relaciones entre datos. A diferencia de la tarea de *TVN*, está se desarrolla cuando ya se cuenta con los datos, o el hallarlos no implica analizar los efectos.

Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia (CGV): Consiste en la construcción de gráficas apoyándose en el análisis de las variaciones, ya sea por medio de datos numéricos o de alguna gráfica. El objetivo no es hallar algún patrón o relación, sino bosquejar una gráfica que modele lo más cercanamente posible la situación que se presenta.

Análisis gráfico con la variación como punto de referencia (AGV): Se buscan patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos, pero a diferencia de *ADT* el análisis esta sobre gráficas, así como elementos que surgen a partir de ella, como tangentes, alturas, asíntotas, entre otros. Las acciones a realizar giran en torno al análisis de variaciones, incluso en gráficas generadas con tecnología.

Tercera fase

Los resultados de la tercera fase nos permiten establecer un modelo con el cual interpretar la forma en que se desarrolla el pensamiento variacional, modelo que involucra varios aspectos que relacionan el uso sistemático de los elementos del Pylvar.

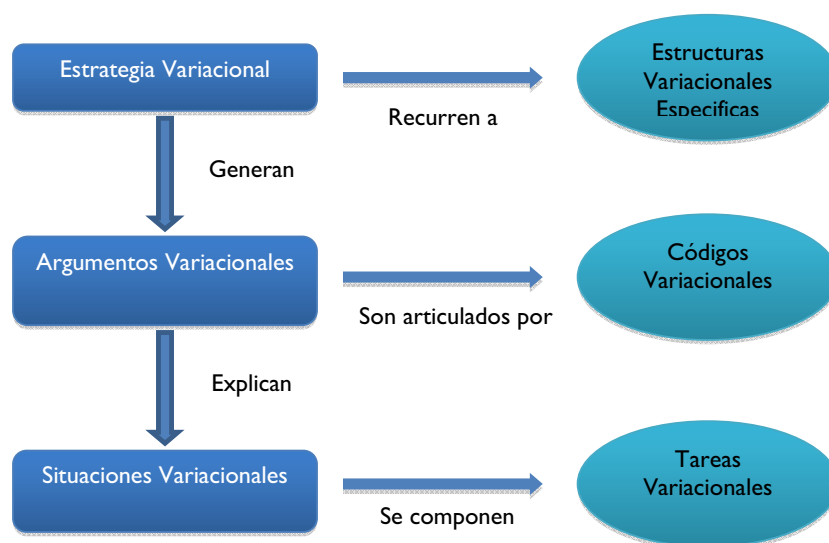


Figura 3: Modelo de interacción de los elementos del Pylvar

De modo que para generar el desarrollo del pensamiento variacional es necesario el uso sistemático e interacción de los elementos que conforman al Pylvar, debido a que el desarrollo del pensamiento variacional implica usar todos estos elementos de manera conjunta y no aislada. Bajo este modelo el desarrollo del pensamiento variacional tiene lugar dentro de una SV, donde el uso de las EV genera el estudio de la variación, pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos al permitir identificar aquello que cambia en una situación, cuantificar ese cambio y analizar la forma en que se dan los cambios. Para ello, las EV se apoyan en el uso de una o más EstV, lo que permite a la persona analizar la variación a partir de las características particulares de cada EstV. El uso combinado de las EV y EstV permite a la persona analizar la variación involucrada y con ello generar los AV para dar explicación a la situación que se plantea. Este tipo de argumentos se caracterizan por manifestar respuestas basadas en la variación, y que son articulados por CV que dan cuenta del estudio de la variación, como pueden ser frases, dibujos, esquemas o gráficas. De esta forma, una SV es resuelta por medio del uso de AV, y se caracteriza por el empleo de EV. Por otra parte, estas situaciones pueden ser divididas en una o más TV, lo que permite organizar el estudio de la variación de las SV en acciones y objetivos más específicos dentro de estos contextos.

Reflexiones finales

Esta caracterización realizada al Pylvar nos ofrece un marco de referencia para identificar aquellas acciones e ideas que corresponde a un pensamiento variacional analizando si se usan los elementos descritos, pero también nos brinda una manera de comprender la forma en que

se genera el desarrollo del pensamiento variacional, lo que a su vez nos brinda herramientas para analizar las dificultades para desarrollar este pensamiento analizando las respuestas a una actividad y comparándolas con el modelo propuesto.

Referencias bibliográficas

- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, D.F. México.
- Cantoral, R., Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (3), 255 – 270.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, pp. 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral (Ed.), *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México: Trillas.
- Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 466 – 476. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México, D.F. México.
- Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México, D.F. México.