EL SIGNIFICADO DEL OBJETO MATEMÁTICO PROPORCIONALIDAD. SU ORIGEN Y DESARROLLO

Francisco Javier Parra Bermúdez, Ramiro Ávila Godoy, Jesús Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
fjparra@correo.física.uson.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, jag_virgo@hotmail.com

Resumen. En este trabajo, presentamos un reporte parcial de los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo más general es investigar el papel de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de construcción de los significados de los objetos matemáticos cuando se utilizan para estudiar situaciones problemáticas en el contexto de la mecánica newtoniana. Esta investigación la estamos llevando a cabo considerando sólo el caso del objeto matemático Proporcionalidad. Abordamos el origen y desarrollo del objeto matemático de referencia, en especial del papel del contexto (geométrico y físico) en este proceso, producto de una revisión bibliográfica sobre el tema. El análisis lo realizamos desde la perspectiva teórica del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática. El propósito de esta etapa fue indagar el origen y desarrollo de los significados del objeto matemático Proporcionalidad y cómo éstos, en un cierto momento, se convierten en obstáculos.

Palabras clave proporcionalidad, obstáculo epistemológico, objeto matemático, significado

Abstract. In this paper, we show a partial report of the progress in a research project which has as main purpose to research the role of the new information and communication technologies in the process of constructing meanings of mathematical objects when used to study problematic situations in the context of Newtonian mechanics. In this research, we are only considering the case of the mathematical object *Proportionality*. We treat the origin and development of the referential mathematical object, specially the role of the context (geometrical and physical) in this process, as a product of a literature review on the subject. The analysis was conducted from the theoretical perspective of the Ontosemiotic approach of Cognition and Mathematical Instruction. The purpose of this stage was to find out the origin and development of the meanings of the mathematical object *Proportionality* and how they, over time, become obstacles.

Key words: proportionality, epistemological obstacle, mathematical object, meaning

Introducción

Uno de los objetos matemáticos más importantes, si no el primordial, para el tratamiento de la regularidad de sucesos que fundamentan el trabajo de investigación de la ciencia, el trabajo técnico y el funcionamiento de gran número de aparatos de medida, es la relación de proporcionalidad entre las magnitudes intervinientes. El sustrato de expresiones tales como razón, proporción, constante de proporcionalidad, etc. que se unifican sintéticamente por medio de la función de proporcionalidad, lo constituyen las operaciones división y producto, dependiendo de las características que fijan la naturaleza de lo que se trata, el que se utilice una u otra.

Los científicos, al estudiar los fenómenos que se producen en la naturaleza, comprueban que en ellos, generalmente se presentan dos (o más) magnitudes relacionadas entre sí. Es decir que al variar una de las magnitudes, la otra también cambia. Por ejemplo al aumentar la masa de un bloque de fierro, aumenta su volumen; la fuerza que se manifiesta entre dos cargas eléctricas disminuye cuando aumentamos la distancia entre ellas, etc. Cuando esto sucede, es decir, cuando las magnitudes están relacionadas, decimos que una es *función* de la otra.

La Física y la Ingeniería son ricas en situaciones donde aparece la variación proporcional.

La Proporcionalidad es un objeto matemático especialmente importante en el proceso de matematización de diversas disciplinas científicas, además de propiciar el desarrollo del pensamiento relacional.

Con respecto a la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático proporcionalidad (OMP) en un curso de Física, si preguntáramos: ¿si una cantidad crece y la otra decrece, pueden ser directamente proporcionales?, la respuesta más frecuente es: *no* que puede considerarse un indicador de las dificultades que tienen los estudiantes para comprender las leyes de la Física y en particular el OMP. Dos cantidades pueden ser directamente proporcionales cuando una crece y la otra decrece, siempre y cuando la constante de proporcionalidad sea un número negativo, (velocidad y tiempo en la caída libre de un cuerpo). La Física nos puede servir como contexto para estudiar matemáticas, y a su vez los significados de los objetos matemáticos (OM) nos sirven para la comprensión de fenómenos físicos. Detectamos como (Valdés, Sifredo, Núñez y Valdés, 1999), que el aprendizaje en los primeros cursos universitarios no está exento de dificultades: los alumnos persisten una serie de interpretaciones erróneas acerca de diversos fenómenos físicos. El OMP es tratado por su relevancia para su enseñanza y aprendizaje por diversos autores (Caputo y Soto, 2002; Rivas, Godino y Castro, 2012).

Con la descripción anterior, pretendemos mostrar la utilidad e importancia del estudio del OMP el cual, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2012) emerge del sistema prácticas que se utilizan al tratar de interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas (SP).

El objeto matemático proporcionalidad en la matemática griega

La matemática, a través de diferentes fuentes de la Antigüedad como el historiador romano Plinio (siglo I d.n.e.) y Diógenes Laercio, historiador griego de la filosofía que vivió entre los (siglos II y III d.n.e.), sabemos que por los años 585 a.d.n.e., el matemático griego Thales de Mileto calculó, de una manera ingeniosa, la altura de la Gran Pirámide de Keops. "La relación que yo establezco con mi sombra es la misma que la pirámide establece con la suya.". De ahí dedujo: "En el mismo instante en que mi sombra sea igual que mi estatura, la sombra de la pirámide será igual a su altura" Por lo que estableció la relación entre los lados de triángulos semejantes, que él mismo demostró y hoy conocemos como teorema de Thales.

A Teano se le atribuye haber escrito tratados de matemáticas, uno de ellos sobre la proporción áurea. La búsqueda de relaciones de proporcionalidad fue la principal motivación que dio lugar a la mayor parte de la producción de la escuela pitagórica. Descubrieron que había magnitudes conmensurables e inconmensurables, descubrimiento que posteriormente dio lugar a la creación, primero de los números racionales y un poco después de los irracionales. Conocieron las ocho formas de una proporción y su propiedad fundamental, (Nomdedeu, 2000).

Por la descripción histórica precedente, consideramos que la matemática griega es geométrica, y para ubicarnos en su epistemología, asumimos que el origen del objeto matemático proporcionalidad surge en ese contexto. Los Elementos de Euclides, representan acabadamente el tipo de geometría que caracteriza el período que va desde la Antigüedad hasta la Época Moderna. Dichas características, conjuntamente con las limitaciones que involucran, sólo serán puestas de manifiesto en forma explícita en el siglo XIX, precisamente cuando tiene lugar una profunda revolución metodológica y un cambio de concepción sobre la significación de la geometría (Piaget y García, 1998).

Para comprender el proceso, lo que lograron y sus limitaciones, es necesario empezar desde los griegos destacando las aportaciones de cuatro geómetras, cuyos trabajos nos permiten ahora entender el origen y desarrollo del OMP. Los sistemas de prácticas desarrollados por cada uno de ellos para resolver cierto tipo de problemas, constituyen, de acuerdo con el EOS, el significado que tenían del OMP; por ejemplo: Apolonio tenía, en forma embrionaria, una cierta idea del uso de coordenadas, Arquímedes utilizaba un método de modificaciones sucesivas de una figura que tiende hacia un límite, así también Euclides y Pappus utilizaban transformaciones por proyecciones. Apolonio no sólo aportó una impresionante cantidad de resultados nuevos, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales puede encontrarse el germen lejano de la geometría analítica del siglo XVII. Se le considera a Apolonio ser el primero en utilizar un sistema de coordenadas para realizar demostraciones geométricas, antes que Fermat y Descartes.

El OMP, se muestra claramente en la obra de Pappus: "cuando se trazan cuatro rectas desde un mismo punto, forman sobre una transversal, trazada arbitrariamente en su plano, cuatro segmentos que tienen entre ellos una cierta relación constante cualquiera que sea la transversal." (Piaget y García, 1998, p. 97).

Para explorar la epistemología del OMP, consideramos, bajo el EOS (Godino *et al,* 2009), que los OM adquieren atributos contextuales que se manifiestan según su uso del lenguaje en facetas duales, el OMP interviene como unidad en el sistema geometría, desde esta perspectiva nos abocamos, en primer término, a la epistemología de la geometría, la cual comienza, con la síntesis que hace Euclides, por un período durante el cual se estudian las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o de dichos cuerpos. No se toma en consideración el espacio como tal, ni por consiguiente las *transformaciones* de las figuras en el interior de un espacio que las comprenda. La siguiente etapa está caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí, cuya manifestación específica es la búsqueda de *transformaciones* que relacionan las figuras según múltiples formas de correspondencia (geometría proyectiva). Una tercera etapa se manifiesta por la preminencia de las estructuras. No se trata de transformar una figura en otra, sino de una estructura que opera sobre un conjunto de elementos que varían o bien sus relaciones. Las etapas anteriores (Piaget y García, 1998) las denominan "intra-figural", "inter-figural" y "trans-figural", respectivamente. Correspondiéndose la primera a una centrada en "dentro" de la figura geométrica, que sería la geometría griega hasta el siglo XVII, una segunda de relaciones con la algebrización de la geometría con Descartes y dos siglos después una tercera de transformaciones con la geometría dinámica de Ponselet, Chasles y, principalmente, Klein.

En el camino hacia las *transformaciones*, desde la perspectiva de la geometría proyectiva de Chasles y Poncelet tuvieron una fuerte oposición, de eminencias, como: Carnot (Piaget y García, 1998), para quien la utilización de cantidades negativas o complejas aplicada a la representación de entidades geométricas era "absurda", por lo que afirmaba: *"yo demuestro que tal noción es completamente falsa y que de su admisión resultarán los más grandes de los absurdos"*

Los significados de los objetos matemáticos como obstáculos epistemológicos en la geometría y el álgebra

Históricamente, lo que se observa es que una gran limitación en el desarrollo de la geometría es el casi nulo uso de las *"transformaciones"* geométricas, en este sentido la geometría griega permanece en ausencia de un álgebra, de aquí la ausencia de toda *"transformación"*, no obstante los "porismas" de Euclides (o *transformaciones* locales centradas en sus resultados figurales), las coordenadas parciales de Apolonio, y las modificaciones de figuras de Arquímedes o Pappus, todos ellos casos particulares sin generalizaciones metodológicas". Posteriormente Descartes juega un papel fundamental al establecer una relación sistemática entre el álgebra y la geometría, pero fue necesario que transcurrieran casi dos siglos (XVII-XIX), antes de llegar a las *transformaciones* geométricas con Lie, Klein, Chasles y Poncelet vislumbrándose un comienzo con las *transformaciones* pero limitadas a la geometría proyectiva, subordinándose al conjunto de las geometrías a sistemas algebraicos.

Ante lo anterior nos planteamos las siguientes interrogantes: ¿Cuál fue el significado de la geometría que se convirtió en un obstáculo epistemológico para el uso de las *transformaciones*? ¿Qué significados construidos en geometría se convirtieron, en cierto momento, en obstáculos (epistemológicos) que dificultaron la asimilación del significado de *transformación* ante nuevos sistemas de prácticas creados para resolver nuevos problemas? Las cuales pueden ser reflexionadas por las aportaciones de (Piaget y García, 1998): Sobre el terreno algebraico, el sujeto se siente desde un comienzo libre de construir las transformaciones que le convienen, mientras que a la idea de transformaciones geométricas, debe preguntarse si tiene o no derecho a efectuarlas, en vista de la "realidad" impuesta por los "datos". El largo periodo interfigural no se reduce en modo alguno a la historia de una colaboración entre dos tipos de instrumentos directamente coordinables, sino que está caracterizado por el difícil ajuste de la doble naturaleza objetiva y subjetiva del espacio.

Las dificultades que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, sólo se explica por la *carencia de un* álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones. Aunque resulta difícil explicar el estancamiento prolongado de una ciencia que sólo vuelve a florecer hasta el siglo XVI, de ahí la importancia de la obra de Vieti como un sistematizador, al retomar la ciencia de Diophanto y perfeccionarla. Posteriormente Klein ofrece una profunda interpretación de las obras de Diophanto y de Vieti sobre la base de un profundo análisis del pensamiento griego y del significado de la ciencia que se desarrollaría en los siglos XVI y XVII.

En el caso del álgebra el OMP, inicialmente emerge con la teoría de las proporciones geométricas elaboradas en el seno de las perspectivas euclidianas. Eudoxio, Aristóteles y Proclo proclamaron un *divina ars*, lo que sería la teoría general de las proporciones, capaz de englobar todo el conocimiento matemático en su conjunto. En una siguiente etapa el OMP, se manifiesta en los trabajos de matemáticos como Vieti, referidos a las transformaciones, hechas posibles gracias a un simbolismo abstracto y general. A partir de Vieti y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se limita al estudio de las ecuaciones algebraicas. En el siglo XVII se encuentran soluciones algebraicas para ciertos problemas de la geometría y de la mecánica. Pero, en cada problema se muestra un método de resolución que es propio para cada situación particular. Sin embargo, en la segunda mitad del siglo XVII, haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas, tomadas del cálculo infinitesimal, se llegan a formular en el interior del álgebra, problemas de una gran generalidad, lo cual condujo al teorema fundamental del álgebra. Con el cálculo infinitesimal, Euler, Lagrange, Gauss y Cauchy, contribuyeron significativamente al desarrollo del álgebra. Por ejemplo, Lagrange, al considerar el número de valores diferentes que toma un polinomio cuando se permutan las variables de todas las maneras posibles, aportaría la brillante idea que contendría el germen de donde surgiría la teoría de grupos. Posteriormente en una tercera etapa el OMP, se encuentra en las síntesis, donde se alcanzan en el álgebra estructuras, cuyas construcciones comienzan con los grupos de Galois.

El objeto matemático proporcionalidad y su epistemología en la física

En la Física, con Aristóteles surge incipientemente lo que sería el OMP de manera cualitativa: entre mayor es el peso de un cuerpo mayor es su rapidez al caer, es decir una proporcionalidad entre la rapidez y el peso, posteriormente considerada errónea. Al derrumbarse el paradigma aristotélico centrado en los atributos de los cuerpos y no en sus relaciones, el significado del OMP desarrollado en la geometría griega se enriquece al emerger en el estudio de fenómenos físicos, por ejemplo Galileo establece la relación entre la longitud y el tiempo de caída de un cuerpo, lo que arrojaría una *proporcionalidad directa cuadrática* de la forma: $h \alpha t^2$, después Kepler (1618), en sus famosas leyes encontraría para su tercera ley que: *para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica*. Esto es: $T^2 \alpha L^3$. En el siglo XVII al igual que la geometría, la Física también adquiere una algebrización.

Con el desarrollo del cálculo diferencial, el OMP con Newton, se enriquece con sus leyes del movimiento, así en sus *Principia* en la 2da. Ley, para una fuerza F, en la interacción de cuerpos: $dp \alpha dt$ lo que sería una *proporcionalidad directa lineal* entre el momento lineal y el tiempo, al considerar la masa constante la relación entre la fuerza y la aceleración es: $F \alpha a$. El mismo Newton, al formular su Ley de la gravitación universal, tiene que: $F \alpha 1/r^2$ (fuerza y distancia entre cuerpos), como una *proporcionalidad inversa cuadrática*. En la posteridad se daría un continuo establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre los objetos de la Física en sus diversas representaciones (*gráfica, numérica y analítica)* en la Física Clásica. Posteriormente, al emerger la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica el OMP, se ha enriquecido aún más.

Los obstáculos epistemológicos en la física y el OMP

El desarrollo de la Física está íntimamente relacionado con los diversos paradigmas imperantes en las diversas etapas de dicho desarrollo, el aristotélico, el newtoniano y el einsteiniano, los cuales se caracterizan por ser: especulativo-descriptivo, experimental-cuantitativo y por su relatividad respectivamente. En el primero de ellos el OMP, se presenta de manera incipiente porque al explicar la naturaleza, éste paradigma se limita a una descripción cualitativa de los fenómenos físicos y la explicación de los mismos se mantiene a un nivel especulativo ya que se basaba en la aceptación de ciertas premisas como verdades evidentes. Carece de la medición, siendo su obstáculo limitarse a describir y no relacionar. En principio, el objeto de estudio es el hecho. Entre sus premisas incuestionables se considera que el estado natural de los cuerpos es el reposo. La axiomática de la Física es material, describir lo que se ve. Lo anterior se refleja, por ejemplo, al considerar que los cuerpos más pesados caen más rápido, lo cual se creyó por alrededor de 2000 años. Fue hasta el siglo XVI, cuando Galileo se centra en el estudio de las relaciones, que exhibió la contradicción lógica del razonamiento aristotélico. Galileo contribuye a un cambio paradigmático en lo metodológico, ante la concepción global de la caída de los cuerpos, y contribuiría en la construcción de los cimientos del paradigma newtoniano caracterizado por lo experimental, consistente en probar lo que se cree, realizando mediciones. Newton crea un modelo matemático de las relaciones entre los objetos al aritmetizarlas, presenta descripciones cuantitativas, por ejemplo la fuerza se concibe como la medida de la interacción entre los cuerpos, la masa como la medida de la inercia. Posteriormente esto también se refleja cuando aparecen los conceptos de energía, trabajo, etc. Pero la limitación de la Física newtoniana se presenta al considerar el carácter absoluto de los objetos relacionados, y no la relatividad de los mismos, desde los diferentes marcos de referencia del observador, por lo que el OMP se limitaba a su carácter absoluto. En el paradigma einsteiniano el tiempo es relativo, las velocidades no se suman en la forma galileana. En el ámbito de la mecánica cuántica: en todo instante un "átomo" no tiene una posición y una velocidad definidas (principio de incertidumbre), contrario a la Física de Newton. Así pues el OMP sigue enriqueciéndose.

Algunas consideraciones sobre didáctica de la matemática

Lo anteriormente expuesto nos lleva a coincidir con (Ávila, Parra y Ávila, 2012), en la escuela debe considerarse: a) El estudio del origen y desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, así como los obstáculos epistemológicos que en un cierto momento se presentaron, porque proporcionan algunos elementos útiles para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula escolar b) Dicho estudio proporciona elementos para el diseño de estrategias de enseñanza que sean más adecuadas al propósito de mejorar significativamente el desempeño matemático de nuestros alumnos.

Conclusiones

- En el análisis que se ha hecho del desarrollo del objeto matemático proporcionalidad (OMP), se ha asumido que éste es una construcción humana de naturaleza pragmática, lo cual implica que emerge de un sistema de prácticas creado para analizar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas (SP), en la Matemática y en la Física.

- El análisis del origen y desarrollo del OMP en sus diversas manifestaciones: proporcionalidad directa, inversa, al cuadrado, etc., ha permitido valorar la eficacia de las herramientas conceptuales y metodológicas del (EOS) utilizadas para llevar a cabo dicho análisis.
- Un constructo teórico, especialmente útil para la didáctica del OMP, es el de obstáculo epistemológico que ayuda a entender las dificultades que tienen los estudiantes para modificar una concepción previamente construida y proporciona elementos para el diseño de estrategias didácticas para superarlos.
- La investigación que se ha realizado en el campo de la Epistemología, sobre el origen y desarrollo del OMP, ha sido de gran utilidad en Didáctica de la Matemática pues ha permitido identificar elementos que ayudan a comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Ávila, J., Parra, F.J. y Ávila, R. (2012). Epistemología y Didáctica de la Matemática. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 775-783. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caputo, L. y Soto, N. (2002). *Proporcionalidad directa e inversa: Dificultades en su aprendizaje.* Recuperado el 12 de febrero de 2012 de http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-008.pdf

Godino, J. D. (2012). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática.* Recuperado el 29 de septiembre de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática.* Recuperado el 10 de junio de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Gómez, A. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2 (3), 19-29.

Nomdedeu, X. (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas. Entretejidas.* Madrid: Nivola Libros.

Piaget, J. y García, R. (1998). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* México: Siglo XXI.

Rivas, M., Godino, J. D. y Castro, W. (2012). *Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la*

Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. Recuperado el 10 de junio de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Bolema%2042B_proporcionalidad.pdf

Rodríguez, A. y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*. Recuperado el 12 de marzo de 2012 de http://www.oei.es/n8923.htm

Valdés, P., Sifredo, B., Núñez, J. y Valdés, R. (1999). *El Proceso de Enseñanza- Aprendizaje de la Física en las Condiciones Contemporáneas*. La Habana: Academia.